



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA**

**UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY**



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



PROGRAM OPERACYJNY KAPITAŁ LUDZKI
Priorytet III, Działanie 3.2

Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UMIEJĘTNOŚCI MATEMATYCZNE UCZNIÓW

NA PODSTAWIE WYNIKÓW MATURY Z MATEMATYKI MAJ 2011



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Matura z matematyki w 2011 roku.

Arkusze podstawowy



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadania w arkuszu dla poziomu podstawowego

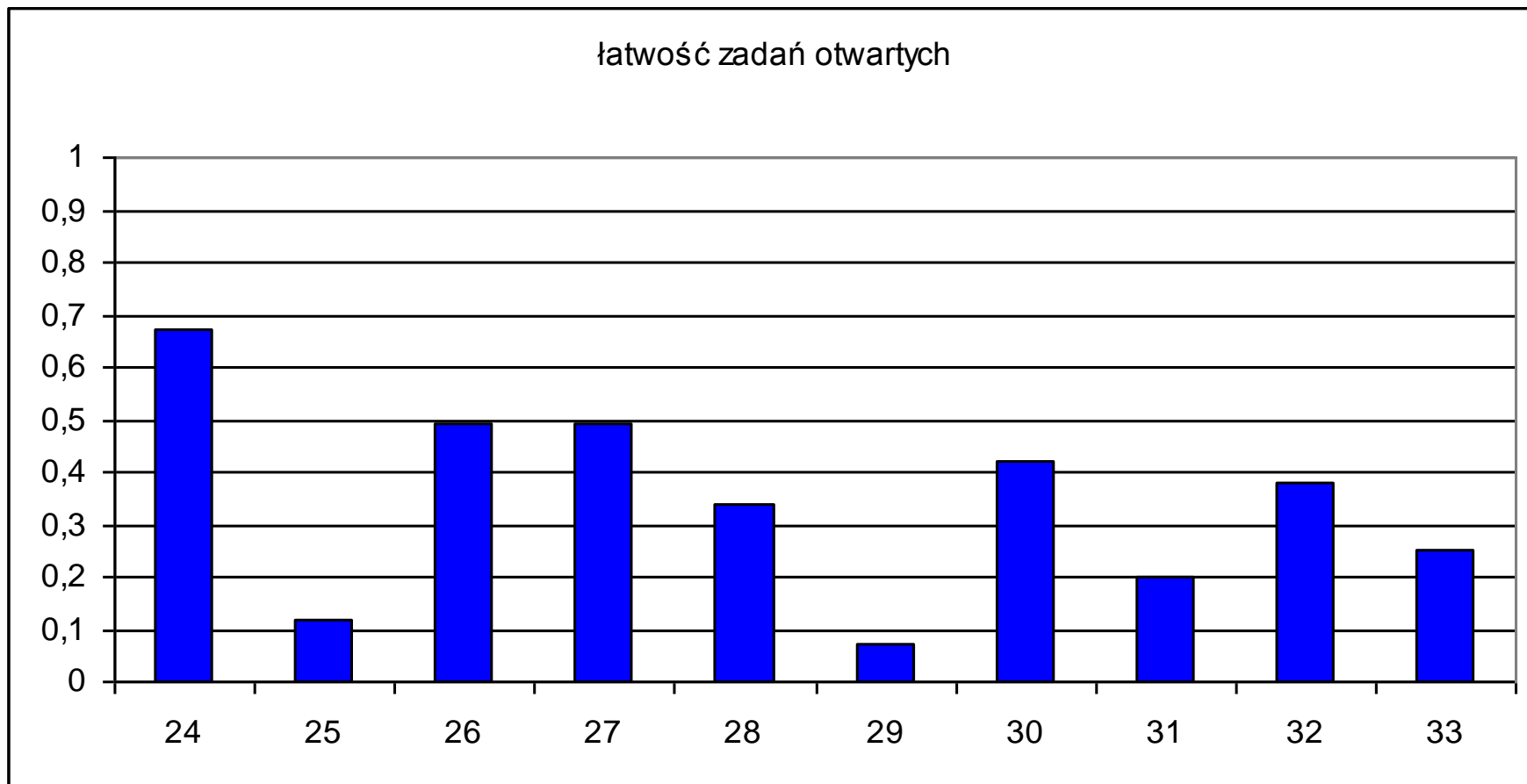
Można podzielić na trzy grupy:

- I. grupa** – zadania zamknięte – od 1 do 23 (każde zadanie z tej grupy punktowane w skali 0 – 1).
- II. grupa** – zadania krótkiej odpowiedzi – od 24 do 30 (każde zadanie z tej grupy punktowane w skali 0 – 2).
- III. grupa** – zadania rozszerzonej odpowiedzi – zadania 31 i 33 (każde punktowane w skali 0-4) oraz zadanie 32 punktowane w skali 0-5.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

łatwość zadań otwartych





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Szczegółowa analiza zadań. Popelniane błędy.



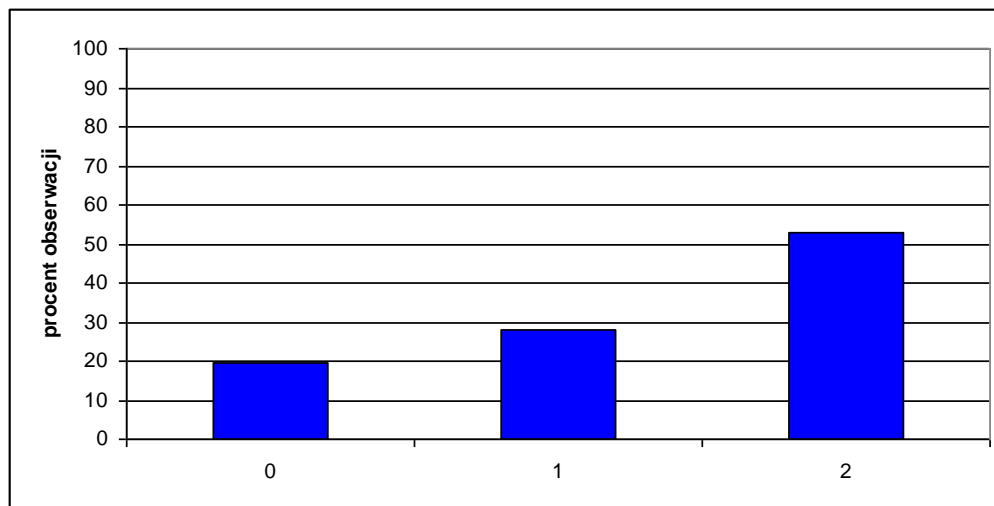
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na znalezieniu pierwiastków trójmianu kwadratowego.

0 punktów	1 punkt	2 punkty
19,38%	27,80%	52,82%



$$f_{op} = 2,4\%$$

$$t = 0,67$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

Maj 2011	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	19,38%	27,80%	52,82%

Listopad 2010	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	32,5%	34,7%	32,8%

Maj 2010	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	27%	27%	46%

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

		Matura majowa, maj 2011 – Zadanie 24.			Razem
		0	1	2	
Matura próbna, listopad 2010 Zadanie 26.	0	10,0%	10,4%	8,8%	29,1%
	1	3,6%	13,4%	18,8%	35,8%
	2	0,8%	5,5%	28,7%	35,1%
	Razem	14,4%	29,3%	56,3%	100%



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Trudności

- Poprzestawanie na obliczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego.
- Błędnie obliczone pierwiastki trójmianu kwadratowego.
- Błędnie zapisany zbiór rozwiązań nierówności.
- Błędy nieistotne dla poprawności rozwiązania, np. pomyłka przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

$3x^2 - 10x + 3 \leq 0$ równanie pomoc. $3x^2 - 10x + 3 = 0$

$\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $x_2 = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3$

$x_1 = \frac{1}{3}$
 $x_2 = 3$

nie ma x , spełniających nierówność

Odpowiedź: Nierówność nie ma rozwiązań



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

$$3x^2 - 10x + 3 \leq 0$$

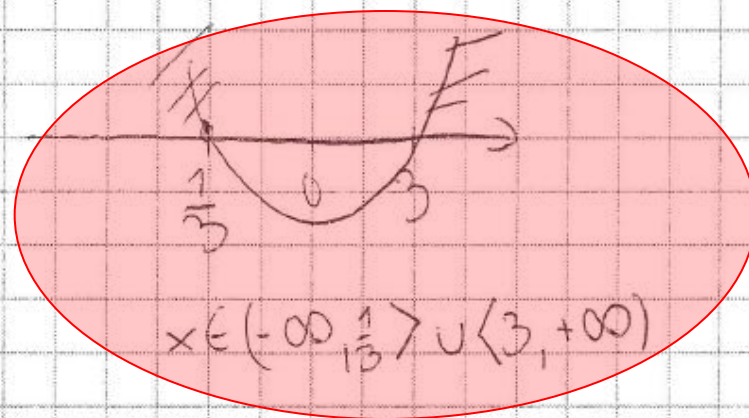
$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Delta = 100 - 36$$

$$\Delta = 64 \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{10+8}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$$





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

$3x^2 - 10x + 3 \leq 0$

$\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3$

$\Delta = 100 - 12 \cdot 3$

$\Delta = 100 - 36$

$\Delta = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3$

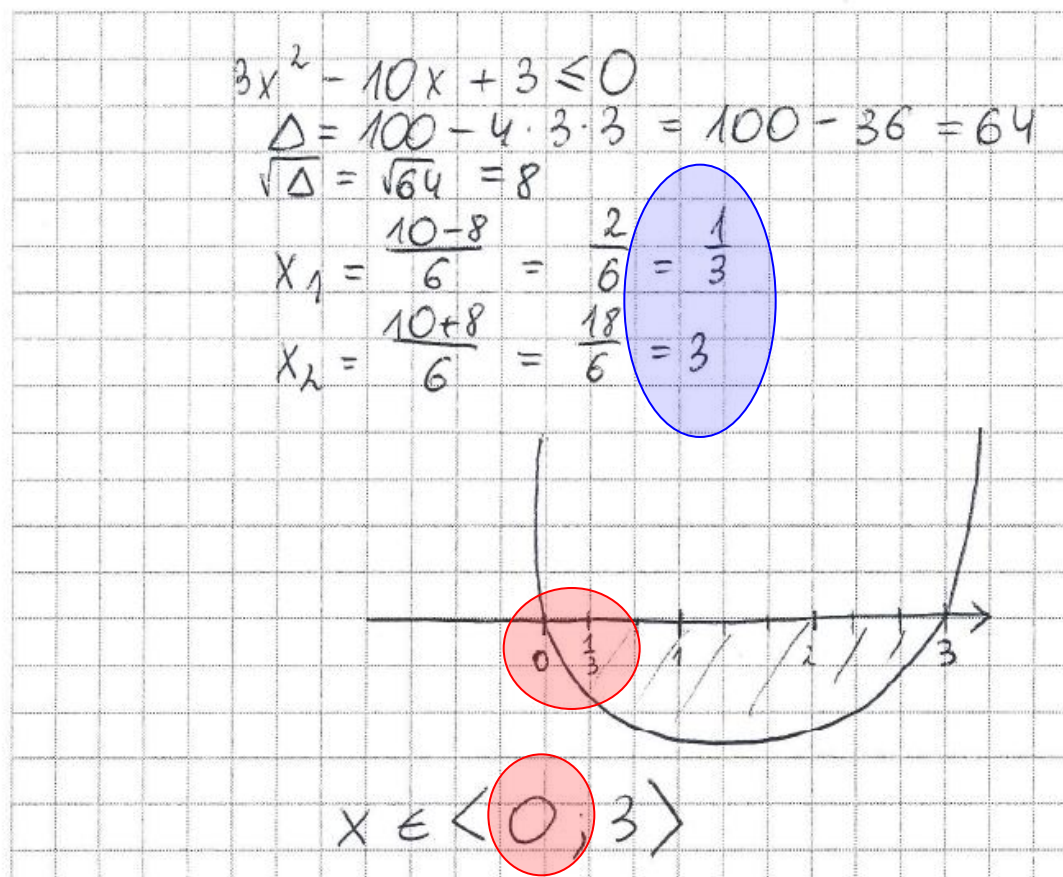
Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności są $x_1 = \frac{1}{3}$ i $x_2 = 3$.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

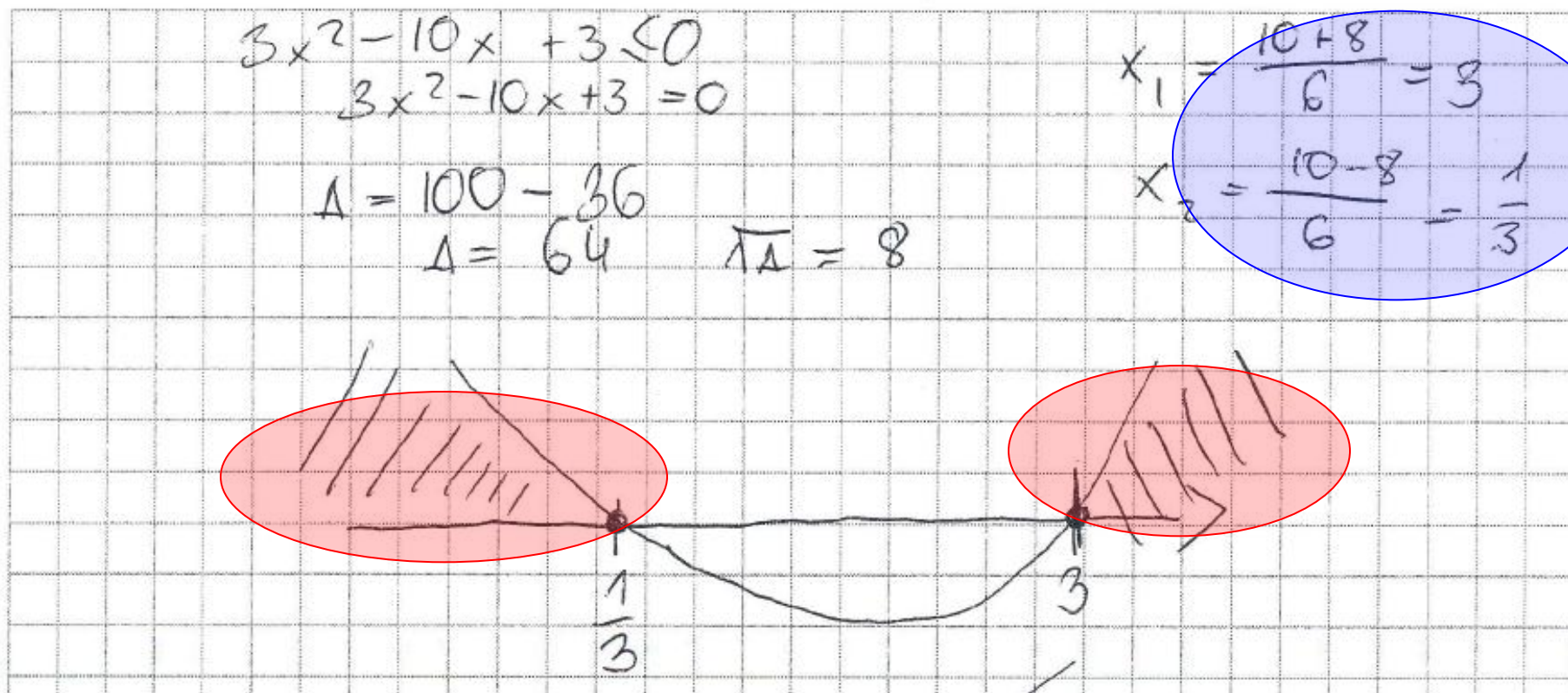




Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

$3x^2 - 10x + 3 \leq 0$

$x(3x - 10) + 3 \leq 0$

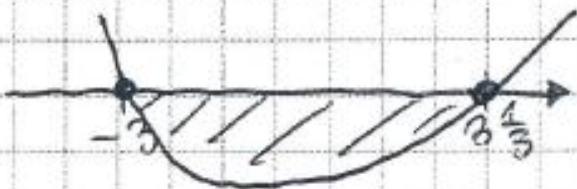
RÓWNANIE KWADRATOWE

$(3x - 10)(x + 3) = 0$

$3x = 10 \quad \vee \quad x = -3$

$x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

miejsca zerowe funkcji kwadratowej
to $m_{p_1} = 3\frac{1}{3}$ i $m_{p_2} = -3$



Ramiona do góry,
bo współczynnik
kierunkowy
dodatni

Rozwiązaniem nierówności
jest przedział: $x \in \langle -3, 3\frac{1}{3} \rangle$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

$\Delta = 100 - 36$
 $\Delta = 64$
 $\sqrt{\Delta} = 8$
 $x_1 = \frac{10 - 8}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 $x_2 = \frac{10 + 8}{6} = 3$

$x \in [3; \frac{1}{3}]$

Odpowiedź: $x \in [3; \frac{1}{3}]$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

$3x^2 + 10x + 3 \leq 0$

równanie pomocnicze:

$3x^2 + 10x + 3 \leq 0$

$a = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3$

$\Delta = 100 - 36 = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{-10 - 8}{6} = \frac{-18}{6} = -3$

$x_2 = \frac{-10 + 8}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$P =$

Odpowiedź: $x \in \left[-3, -\frac{1}{3}\right]$

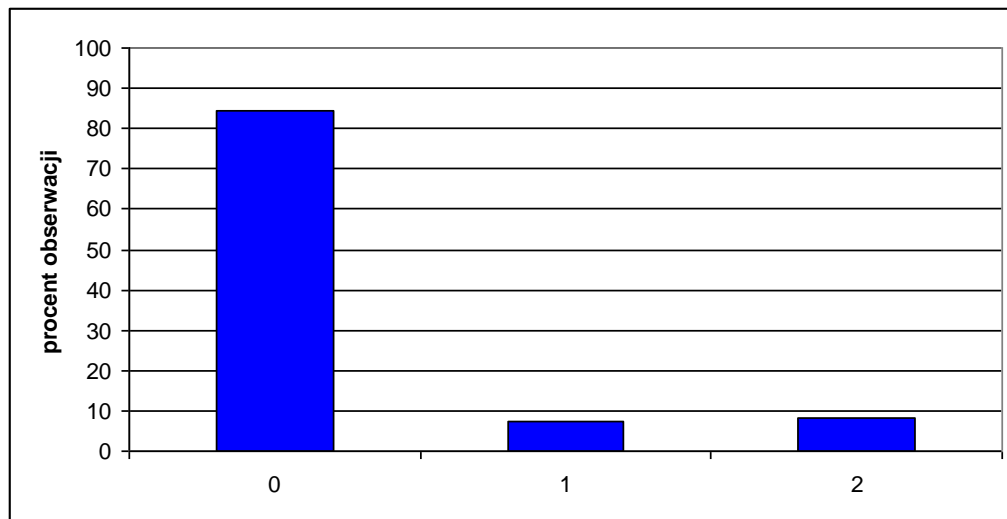
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2pkt)

Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na odpowiednim wykorzystaniu wzoru skróconego mnożenia do obliczenia iloczynu $a \cdot b = -3$

0 punktów	1 punkt	2 punkty
84,21%	7,44%	8,35%



$$f_{op} = 25,9\%$$

$$t = 0,12$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2 pkt) (dow. alg.)

Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

Maj 2011	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	84,21%	7,44%	8,35%

Listopad 2010	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	93,2%	0,6%	6,2%

Maj 2010	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	77%	14%	9%

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2 pkt) (dow. alg.)

		Matura majowa, maj 2011 – Zadanie 25.			Razem
		0	1	2	
Matura próbna, listopad 2010 - Zadanie 30.	0	81,7%	6,7%	4,3%	92,7%
	1	0,3%	0,1%	0,3%	0,7%
	2	1,3%	0,9%	4,4%	6,7%
	Razem	83,3%	7,8%	8,9%	100%



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

Handwritten solution on grid paper:

~~$a+b=1$~~
 a

$a+b=1$
 $a^2+b^2=7$

$a^4+b^4=31$
 $(a^2)^2+(b^2)^2=31$
 $(7-b^2)^2+(b^2)^2=31$
 $49-14b^2-b^4+b^4=31$
 $-14b^2=-18$
 $b^2=\frac{-18}{-14}=\frac{9}{7}$
 $b_1=\frac{3}{\sqrt{7}} \vee b_2=-\frac{3}{\sqrt{7}}$
 $a_1=1-\frac{3}{\sqrt{7}} \vee a_2=1+\frac{3}{\sqrt{7}}$
Odpowiedź

~~$\frac{2}{b} + \frac{2}{a} = 7$~~
 ~~$\frac{9}{7} + 1 - \frac{6}{\sqrt{7}} + \frac{9}{7} = 7$~~



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

$$\text{Zał. } a + b = 1, a^2 + b^2 = 7 \quad a = 1 - b$$

$$\text{Teza: } a^4 + b^4 = 31$$

$$\text{D-d: } a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2$$

$$49 - x = 31$$

$$2a^4b^4 = 18 / 2$$

$$a^4b^4 = 9$$

$$(1-b)^4 b^4 = 9$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=7 \\ a^4+b^4=31 \end{cases}$	$a=1-b$	$a^2+b^2=7$
	$(1-b)^2+b^2=7$	$a^2+\sqrt{13}=7$
	$1^2-2\cdot 1\cdot b+b^2+b^2=7$	$a^2=7-\sqrt{13}$
	$1-2b+b^2+b^2=7$	$a^2=-6$
$a^4+\sqrt{13}^4=31$	$1-2b+b^2+b^2=7$	a^4 SPRZECZE
$\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}$	$2b^2-2b+1=7$	
$\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}$	$2b^2-2b-6=0$	
1		
$b^2=$	$D=b^2-4ac$	
	$D=4-4\cdot 2\cdot -6$	$D=52$
	$D=4+48$	$\sqrt{D}=2\sqrt{13}$

$b_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$	$b_2 = \frac{2-2\sqrt{13}}{4}$
$\frac{2+2\sqrt{13}}{4}$	$b_2 = -\sqrt{13}$
	$\boxed{-\sqrt{13}}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2 pkt) ²

Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

Handwritten solution on grid paper:

~~$a = b - 1$~~ ~~$b = 1 - a$~~

~~$(b-1)^2 + b^2 = 7$~~ $a + b = 1$

~~$b^2 - 2b + 1 + b^2 = 7$~~ $a = 1 - b$

~~$2b^2 - 2b - 6 = 0$~~ $(1-b)^2 + b^2 = 7$

~~$\Delta = 4 + 48$~~ $1 - 2b + b^2 + b^2 = 7$

~~$1 -$~~ $2b^2 - 2b - 6 = 0$

~~$-$~~ $\Delta = 4 + 48$

~~$1 = \sqrt{52}$~~



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

~~$a+b=1$~~

$a+b=1$

$a^2+b^2=7 \Rightarrow a+b=\sqrt{7}$

$a^4+b^4=31 \Rightarrow a+b=\sqrt[4]{31}$

$\begin{cases} a^2+2ab+b^2=7 \\ a+b=1 \end{cases}$ ~~$a+b=1$~~

$a^2=7-b^2$

$(7-b^2)^2=31$

$49-b^4=31$

$-b^4=31-49$

$-b^4=-18$

$b^4=18 \Rightarrow b=\sqrt[4]{18}$

$a+\sqrt[4]{18}=1$

$a=1-\sqrt[4]{18}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 25. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

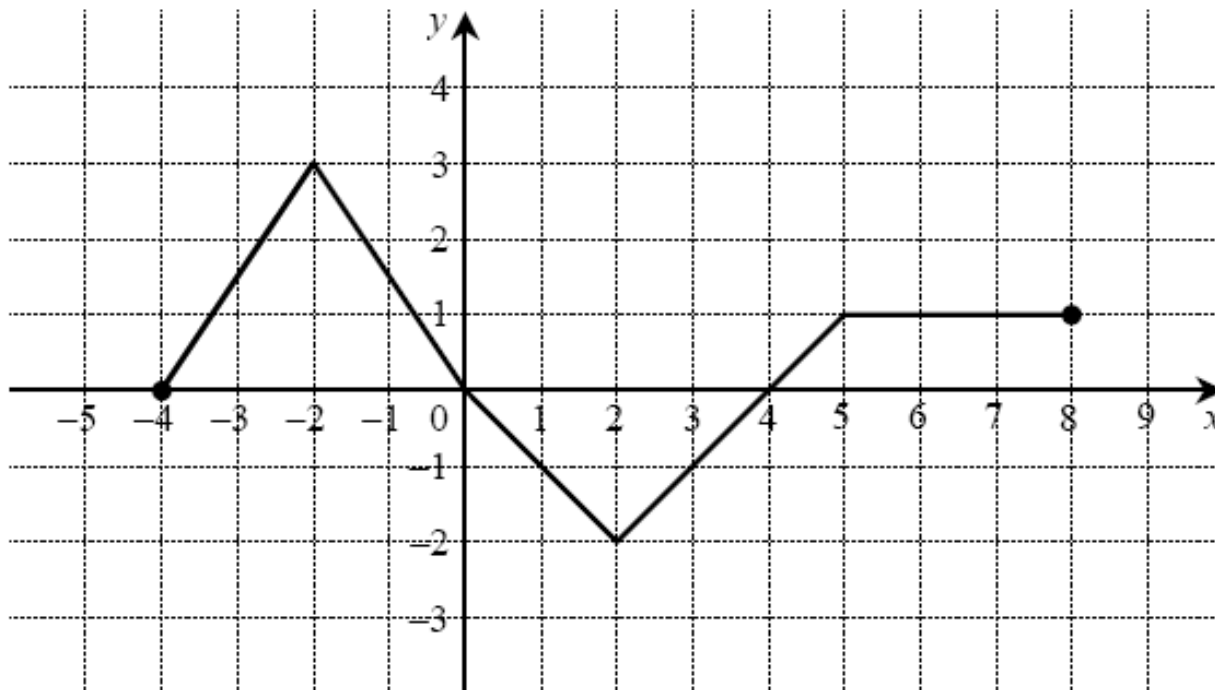
$$\begin{aligned}
 a+b &= 1 & \cancel{a+b} & \quad \cancel{a+b} &= 1 & \quad a &= 1-b \\
 (1-b)^2 + b^2 &= 7 & 1^2 - 2b + b^2 + b^2 &= 7 & & & \cancel{b^2 - 2b + 1} \\
 2b^2 - 2b + 1 &= 7 \\
 b^2 - b - 3 &= 0 \\
 \Delta &= 1 + 4 \cdot 3 = 13 & \sqrt{\Delta} &= \sqrt{13} \\
 b_1 &= \frac{1 - \sqrt{13}}{2} & b_2 &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\
 \cancel{a^4} & \quad (a^2 + b^2)(a^2 + b^2) &= & a^4 + a^2b^2 + b^4
 \end{aligned}$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 26. (2pkt)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Odczytaj z wykresu i zapisz:

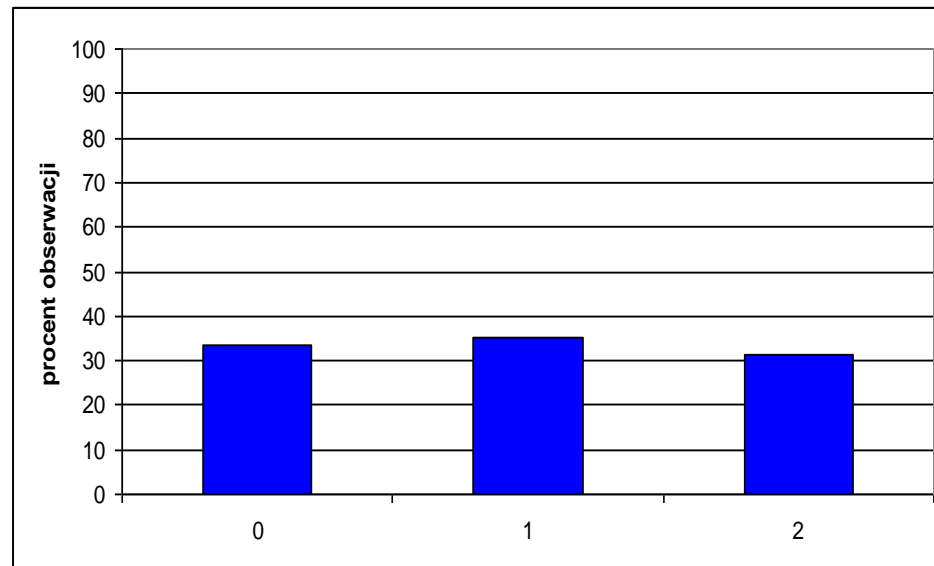
- zbiór wartości funkcji f ,
- przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 26. (2pkt)

0 punktów	1 punkt	2 punkty
33,51%	35,33%	31,16%



$$f_{op} = 3,46\%$$

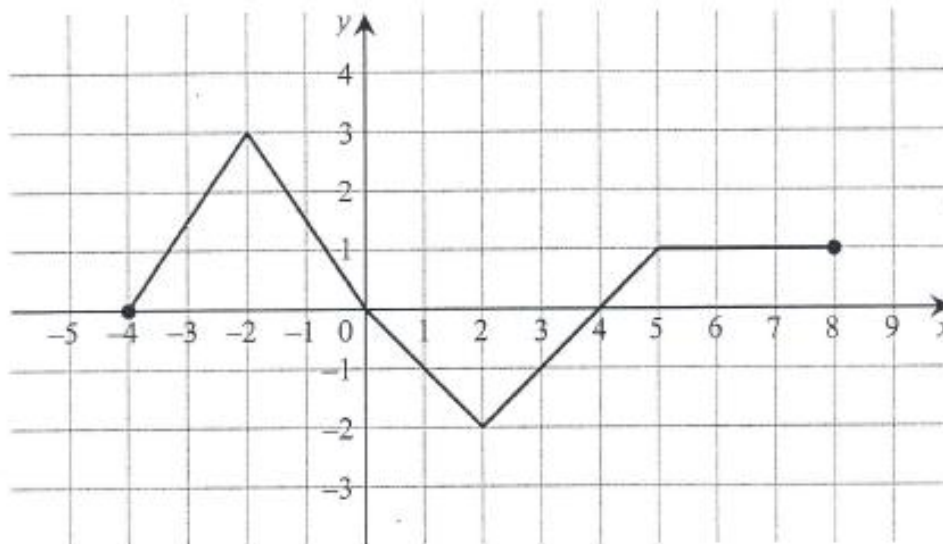
$$l = 0,49$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 26. (2 pkt)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Odczytaj z wykresu i zapisz:

- a) zbiór wartości funkcji f ,
- b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

Zbiór wartości funkcji $\in \langle -4, 8 \rangle$

~~$f \in \langle -2, 2 \rangle$~~

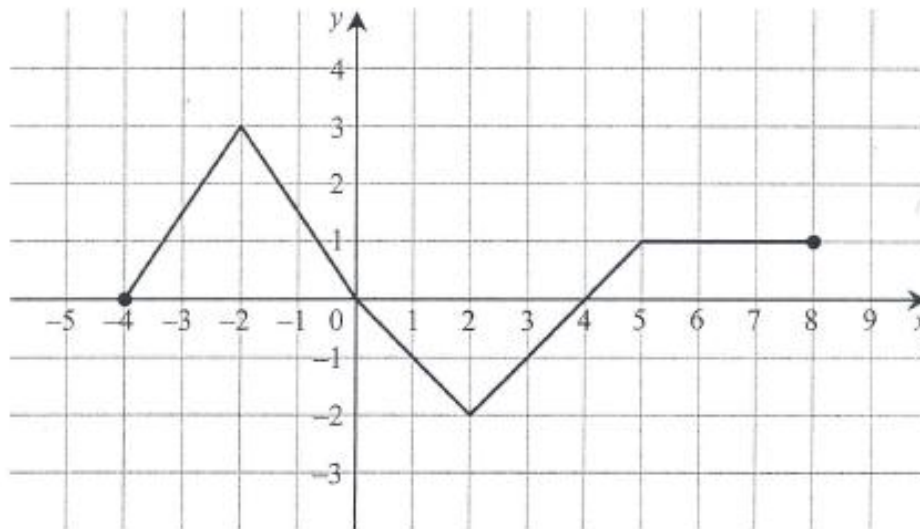
~~funkcja maleje w przedziale $(-2, 2)$~~



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 26. (2 pkt)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Odczytaj z wykresu i zapisz:

- zbiór wartości funkcji f ,
- przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

a) $W \in \langle -2, 3 \rangle$

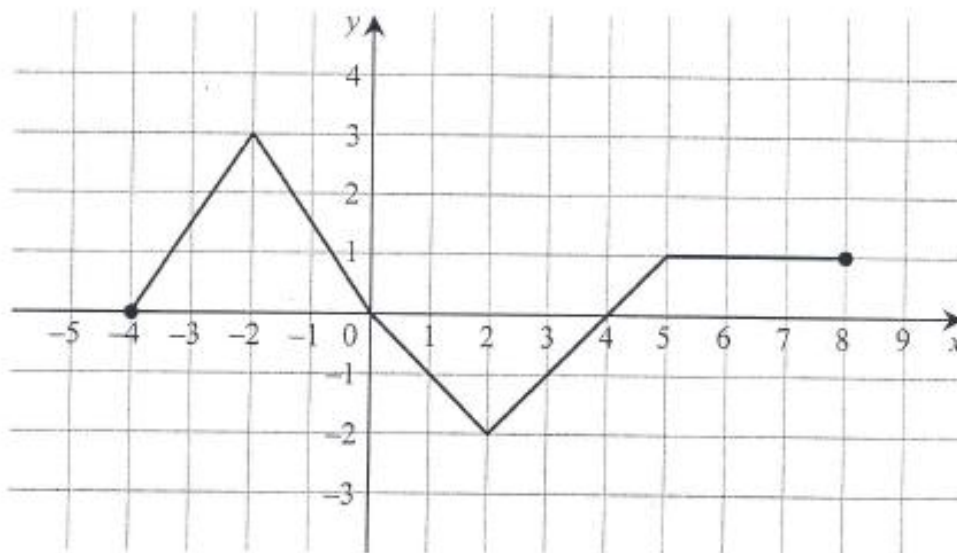
b) $f \downarrow \langle 4, 2 \rangle \langle 3, -2 \rangle$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 26. (2 pkt)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Odczytaj z wykresu i zapisz:

- a) zbiór wartości funkcji f ,
- b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

Zbiór wartości funkcji: ~~[-2, 3]~~ $(-2, 3)$
Funkcja jest malejąca w przedziale: ~~[-2, 2]~~ $(-2, 2)$

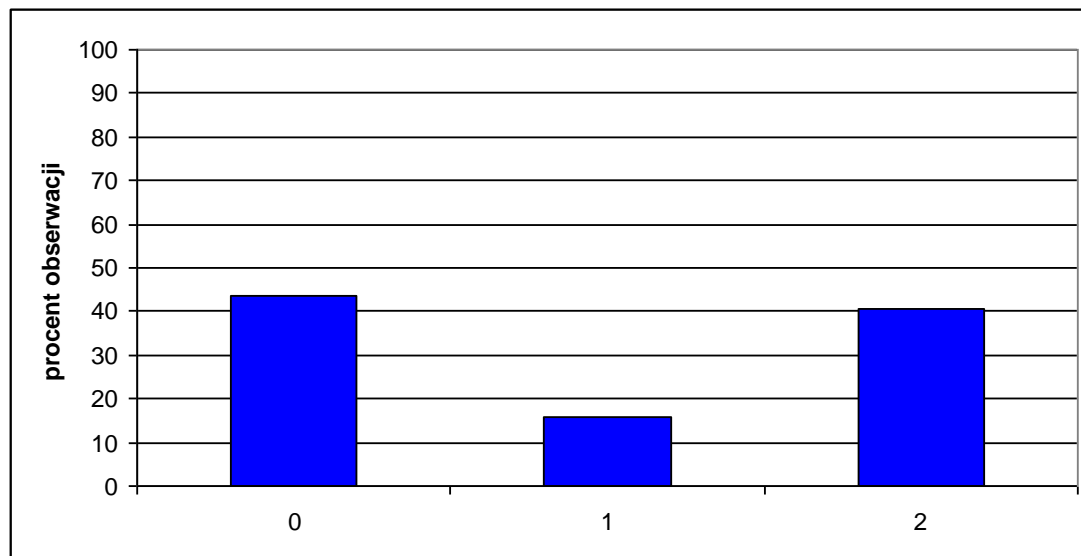
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 27. (2 pkt)

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$.
Oblicz x i y .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na zapisaniu równania z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego.

0 punktów	1 punkt	2 punkty
43,59%	15,74%	40,67%



$$f_{op} = 9,46\%$$

$$t = 0,49$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 27. (2 pkt)

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$.
Oblicz x i y .

Handwritten solution on grid paper:

$$x + y = 8$$

$$x = 8 - y$$

$$y = 19 - 8 + y$$

$$y = 11$$

$$x = 8 - 11 = -3$$

Alternative method using arithmetic sequence formula:

$$a_{n+1} = a_n + 1 \cdot r$$

$$y = 8 - y + r$$

$$2y = 8 + r$$

$$y = 4 + \frac{r}{2}$$

$$19 = 8 + 2r$$

$$11 = 2r$$

$$r = \frac{11}{2}$$

$$y = 4 + \frac{11}{4} = \frac{27}{4}$$

$$x = 8 - \frac{27}{4} = \frac{32 - 27}{4} = \frac{5}{4}$$

Odpowiedź: $x = -3$ a $y = 11$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 27. (2 pkt)

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$.
Oblicz x i y .

Handwritten solution on grid paper:

$x, y, 19$ - ciąg arytmetyczny

$x + y = 8$ $y = 8 - x$

~~$x = \frac{19 + 8 - 8}{2} = 9.5$~~

$x, (8 - x), 19$ - ciąg arytmetyczny



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 27. (2 pkt)

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x+y=8$.
Oblicz x i y .

$-11+30=$

$-41+30=-11$

$\begin{cases} x+2r=19 \\ y+r=19 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=8 \\ x=8-y \end{cases}$ $8-y+2r=19$ $y+r=19$ $-y+2r=11$ $y=19-r$	$x+2(19-y)=19$ $x+38-2y=19$ $x-2y=19-38$ $x-2y=-19$ $8-y-2y=19$ $-3y=19-8$	$x=y$ $-(19-r)+2r=11$ $-19+r+2r=11$ $3r=11+19$ $3r=30 \quad /:3 \quad r=30$ $x+60=19 \quad x=-41$ $x=19-60 \quad y=19-30$ $y=-11$
---	--	---

Odpowiedź: $x=-41 \quad y=-11$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 27. (2 pkt)

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$.
Oblicz x i y .

$x = a_1$
 $y = a_2$
 $19 = a_3$

$x + y = 8$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 8 & | \cdot (-1) \\ a_2 + r = 19 \end{cases}$$

$-a_1 + r = 19$

$-a_1 = 19 - r$

$a_1 = -19 + r$

$r = a_2 - a_1$

$r = a_3 - a_2$

$a_2 = a_1 + r$

$r = 19 - (-19 + r) = 38$

$-19 = a_1 + 38$

$a_1 = -57$

$a_2 = -19$

Odpowiedź: $a_1 = -57$, $a_2 = -19$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 27. (2 pkt)

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$.
Oblicz x i y .

The image shows a handwritten solution on grid paper. The student starts with the variables $x, y, 19$ and the equation $x + y = 8$. They derive $y = \frac{x+19}{2}$ from the arithmetic sequence property. This leads to a system of equations: $\begin{cases} x + y = 8 \\ y = \frac{x+19}{2} \end{cases}$. The student then uses substitution, leading to $x + \frac{x+19}{2} = 8$, which simplifies to $2x + x + 19 = 16$, then $3x = -3$, and finally $x = -1$. A red circle highlights the step $2x + x + 19 = 16$. Other parts of the solution show $y = -x - 8$ and $y = \frac{x+19}{2}$, leading to $2y = x + 19$ and $-x = 8$, which also results in $x = -8$. The final answer is $x = -1$ and $y = 9$.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 27. (2 pkt)

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x+y=8$.
Oblicz x i y .

$$\begin{cases} \frac{x+19}{2} = y \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$\frac{x+19}{2} = y$$

$$y = \cancel{19} - x$$

$$x = 8 - y$$

$$\frac{8-y+19}{2} = y$$

$$4-y+19 = y$$

$$4+19 = 2y$$

$$23 = 2y$$

$$y = 11,5$$

$$x+y=8 \quad 11,5-8$$

$$x = 11,5-8 = 3,5$$

$$x = 3,5$$

spr

$$\frac{-3,5+19}{2}$$

Odpowiedź: ... $x=3,5$... $y=11,5$

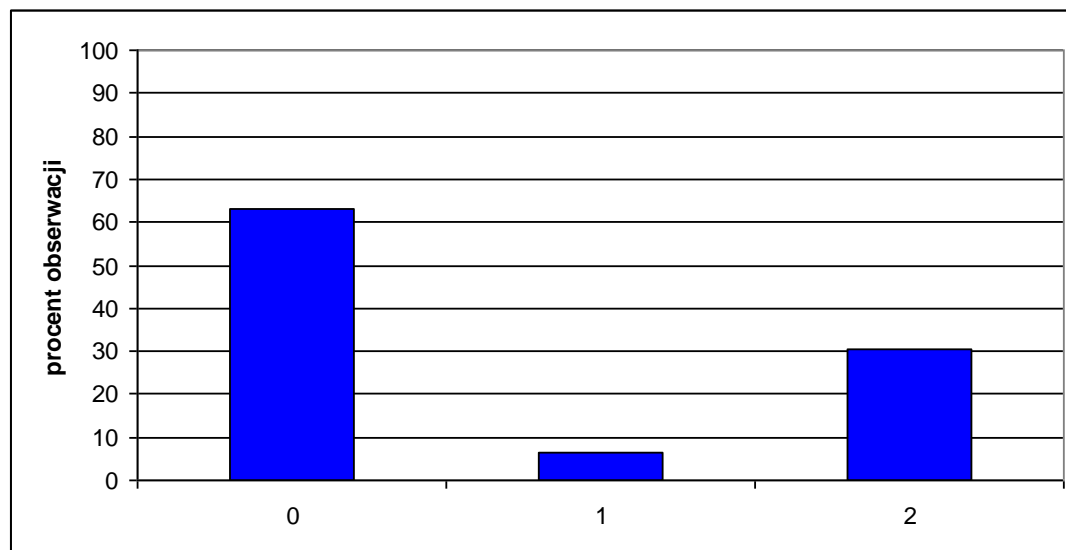
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania zależało od przyjętej metody rozwiązania. W schemacie oceniania opisano pięć różnych sposobów rozwiązania.

0 punktów	1 punkt	2 punkty
63,02%	6,48%	30,50%



$$f_{op} = 20,86\%$$

$$t = 0,34$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

$\alpha > 90^\circ$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = 2$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = 2$$

$$2(\cos \alpha \cdot \sin \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$2 \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$2 \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha = 1 \quad | : 2 \sin \alpha$$

$$2 \cos \alpha = \frac{1}{2 \sin \alpha} \quad | \cdot 2$$

$$4 \cos \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$4 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 1$$

$$2 \sin 2\alpha = 1 \quad | : 2$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$\cos \alpha = \frac{1}{4 \sin \alpha}$
 $\frac{1}{4} \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha = 1$
 $\frac{2}{4} \sin^2 \alpha = 1 \quad | : \frac{2}{4}$
 $\sin^2 \alpha = 2 \quad \sqrt{\quad}$

$\cos \alpha = \frac{1}{4 \sin \alpha}$
 $\cos \alpha = \frac{1}{4 \sqrt{2}}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin \alpha = \sqrt{2} \quad \sin \alpha = -\sqrt{2}$
 do $\alpha > 90^\circ$
 $\sin \alpha = -\sqrt{2}$

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$$

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = 2$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = 2$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{tg} \alpha + \text{ctg} \alpha = 2$$

$$\text{tg} \alpha \cdot \text{ctg} \alpha = 1$$

$$\text{ctg} \alpha = \frac{1}{\text{tg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = 4$$

Odpowiedź:



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

The image shows a handwritten solution on grid paper. The steps are as follows:

- Initial equation: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$
- Pythagorean identity: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- Substitution: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ and $\sin \alpha = 1 - \cos \alpha$ (circled in red)
- Substituted equation: $\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2$
- Another substitution: $\frac{(1 - \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} = 2$ (circled in red)
- Final simplified equation: $1 - \cos \alpha + \cos \alpha = 2$
- Alternative path: $\sin \alpha \cdot \cos \alpha =$ (with a crossed-out $\sin \alpha / \cos \alpha$)
- Another equation: $\frac{\cos^2 \sin \alpha + \sin^2 \cos \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = 2$
- Further simplification: $\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$
- Another equation: $\frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha} = 2$
- Final result: $\frac{\sin^2 \alpha + (1 - \sin \alpha)^2}{(1 - \sin \alpha) \sin \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$ (circled in red)
- Final simplified result: $\sin \alpha + 1 - \sin \alpha = 2$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = ?$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad | \cdot \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha = 2 - \cos \alpha + \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha = 2$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} \quad | \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$\begin{cases} \frac{\sin L}{\cos L} + \frac{\cos L}{\sin L} = 2 & \sin \cdot \cos = ? \\ \sin^2 L + \cos^2 L = 1 \\ \frac{(\sin L)(\sin L) + (\cos L)(\cos L)}{(\cos L)(\sin L) + (\sin L)(\cos L)} = 2 \\ \frac{\sin^2 L + \cos^2 L}{\cancel{\cos L} \cdot \cancel{\sin L}} = 2 \\ \sin L + \cos L = 2 \\ \sin^2 L + \cos^2 L = 1 \\ \sin = 2 - \cos L \\ (2 - \cos L)^2 + \cos^2 L = 1 \\ 4 - 4 \cos L + \cancel{\cos^2 L} + \cos^2 L = 1 \\ -4 \cos L = -3 \\ \cos L = \frac{3}{4} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \sin^2 L = 1 \\ \sin^2 L = 1 - \frac{9}{16} \\ \sin^2 L = \frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \\ \sin L = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \cos L \cdot \sin L = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{16} \end{cases}$$

Ladka ←



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Handwritten solution on grid paper:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

The final result $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ is circled in red in the original image.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Handwritten solution on grid paper:

$$\left[\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \right]$$

$$\frac{\tan \alpha}{\cancel{\cos \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \quad / \cdot \sin \alpha : \tan \alpha$$

$$\cancel{\tan \alpha} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\tan \alpha}$$

$$2 \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha \quad / : 2$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos \alpha \cdot \tan \alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\cos \alpha \cdot \tan \alpha}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{2} \quad / : 2$$

$$= \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

Odpowiedź:

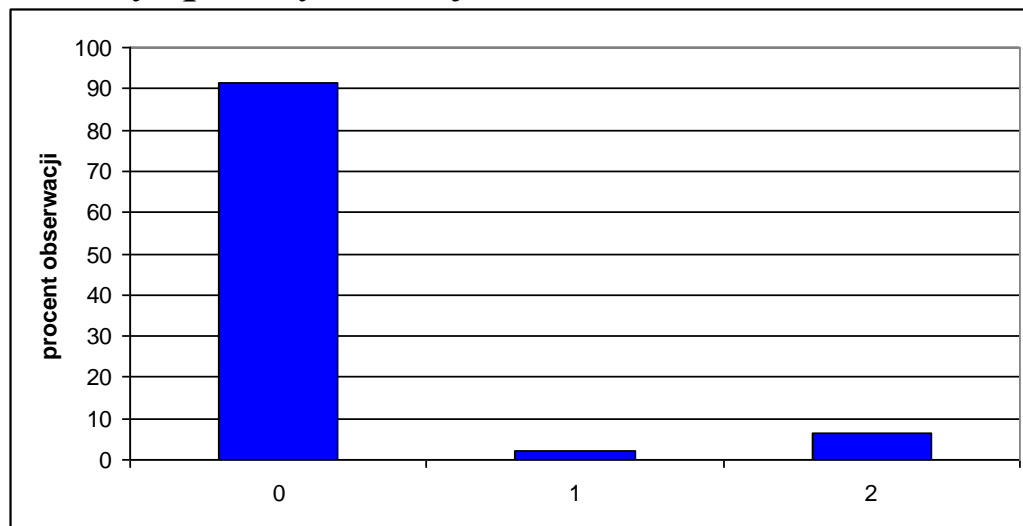
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 29. (2 pkt)

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E , że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

W zależności od przyjętej metody rozwiązania, pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na odpowiednim wykorzystaniu założeń do bilansu kątów. W schemacie oceniania przedstawiono cztery sposoby rozwiązania.

0 punktów	1 punkt	2 punkty
91,44%	2,28%	6,28%



$$f_{op} = 11,51\%$$

$$t = 0,07$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 29. (2 pkt) (dow. geom.)

Maj 2011	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	91,44%	2,28%	6,28%

Listopad 2011	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	93,5%	3,6%	2,9%

Maj 2010	0 punktów	1 punkt	2 punkty
	88%	7%	5%

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 29. (2 pkt) (dow. geom.)

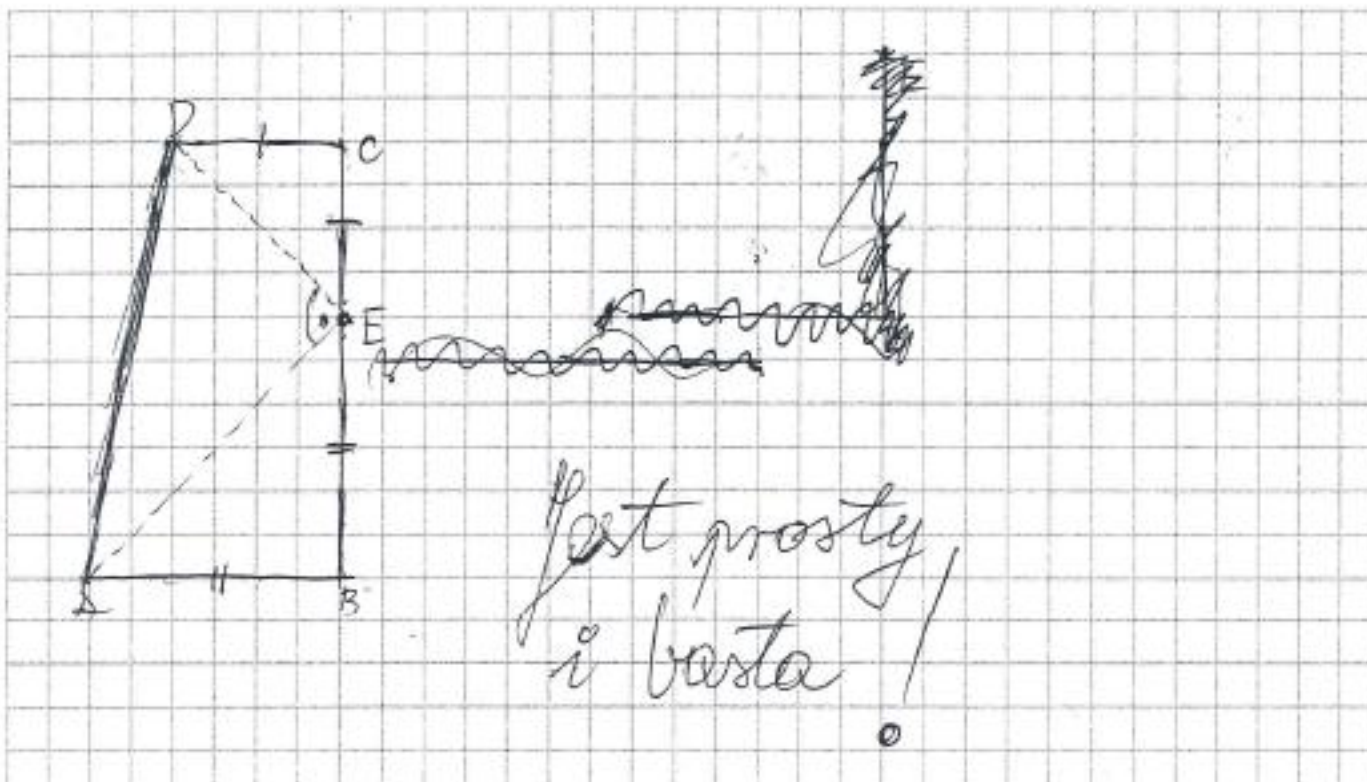
		Matura majowa, maj 2011 – Zadanie 29.			Razem
		0	1	2	
Matura próbna, listopad 2010 - Zadanie 29.	0	87,4%	1,9%	3,8%	93,0%
	1	2,5%	0,3%	1,1%	3,9%
	2	1,0%	0,2%	1,8%	3,1%
	Razem	90,9%	2,4%	6,7%	100%



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 29. (2 pkt)

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E , że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$x = 2$
 $2x = 4$

$\text{tg } \alpha = \frac{x}{x} = \frac{2}{2} = 1$
 $\text{tg } 45^\circ = 1$
 $90^\circ + 45^\circ + \beta = 180^\circ$
 $135^\circ + \beta = 180^\circ$
 $\beta = 45^\circ$
 $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

skoro:

$$|EC| = |CD|$$

$$|EB| = |BA|$$

~~zatem~~ ~~że~~ ~~$|AE| = |ED|$~~

~~$|AB| = |CD|$~~

wynika z tego że jeśli we trójkącie AED
opisalbysmy okrąg to $|AD|$ byłby średnicą
tego okręgu. Kąt AED jest oparty na
średnicy więc jest prosty.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Diagram of a right-angled triangle with vertices A, B, C and altitude from C to hypotenuse AB at point E. The altitude is labeled 'y'. The segments of the hypotenuse are labeled 'x' and 'z'. The hypotenuse is labeled 'u'. The legs are labeled 'y' and 'z'. The hypotenuse is also labeled '2y'.

Handwritten text: *koncept i podobieństwo*

$$x^2 + x^2 = z^2$$

$$2x^2 = z^2 / r$$

$$2x = z$$

$$y^2 + y^2 = u^2$$

$$2y^2 = u^2 / r$$

$$2y = u$$

Diagram of a right-angled triangle with vertices A, B, C and altitude from C to hypotenuse AB at point E. The altitude is labeled 'y'. The segments of the hypotenuse are labeled 'h' and '2y'. The hypotenuse is labeled 'u'. The leg is labeled 'y'. The hypotenuse is also labeled '2y'.

$$y^2 + h^2 = (2y)^2$$

$$y^2 + h^2 = 4y^2 / y^2$$

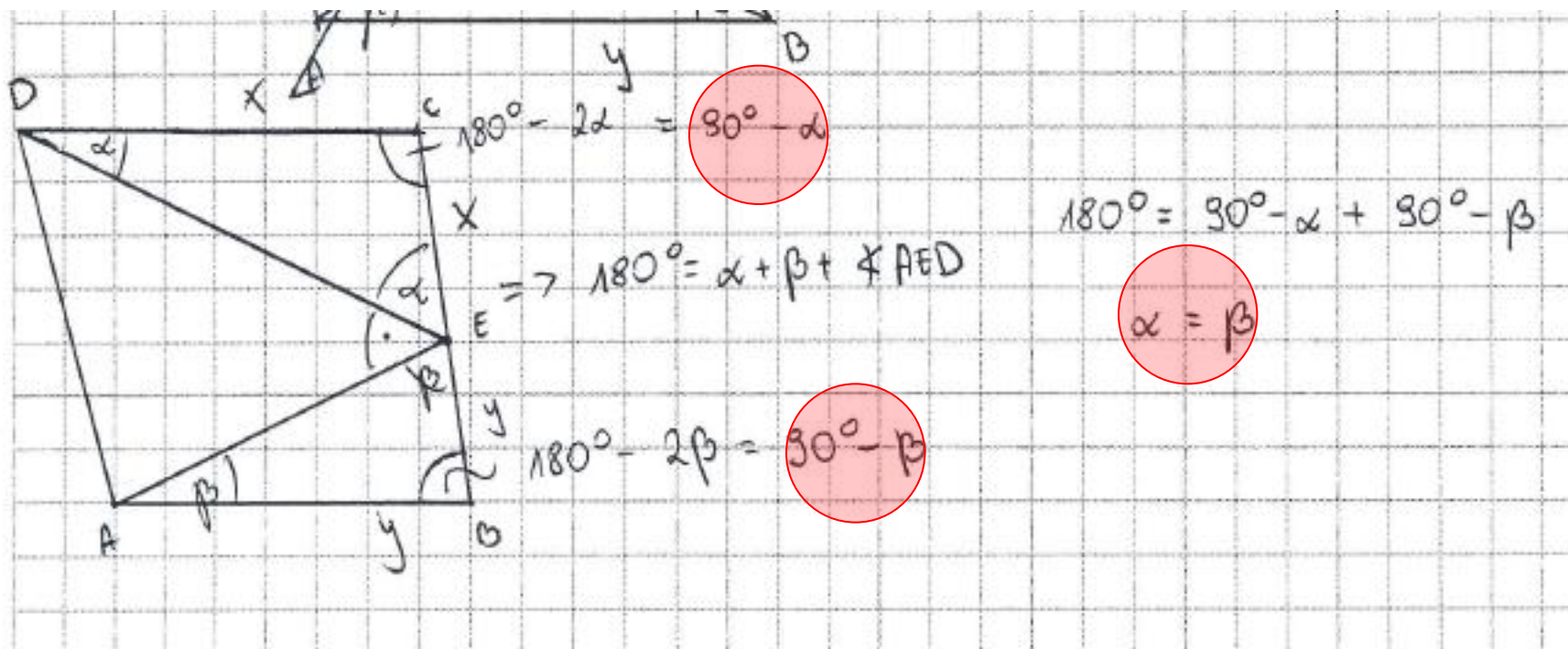
$$u^2 = 4$$

$$h = 2$$

Scribbles:

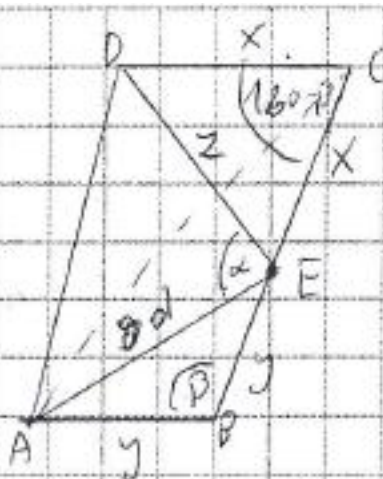


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



$$\text{Kąt } \angle ABE = \beta$$

$$\text{Kąt } \angle DEC = 180 - \beta$$

$$\cos(180 - \beta) = -\cos \beta$$

$$z^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos(180 - \beta)$$

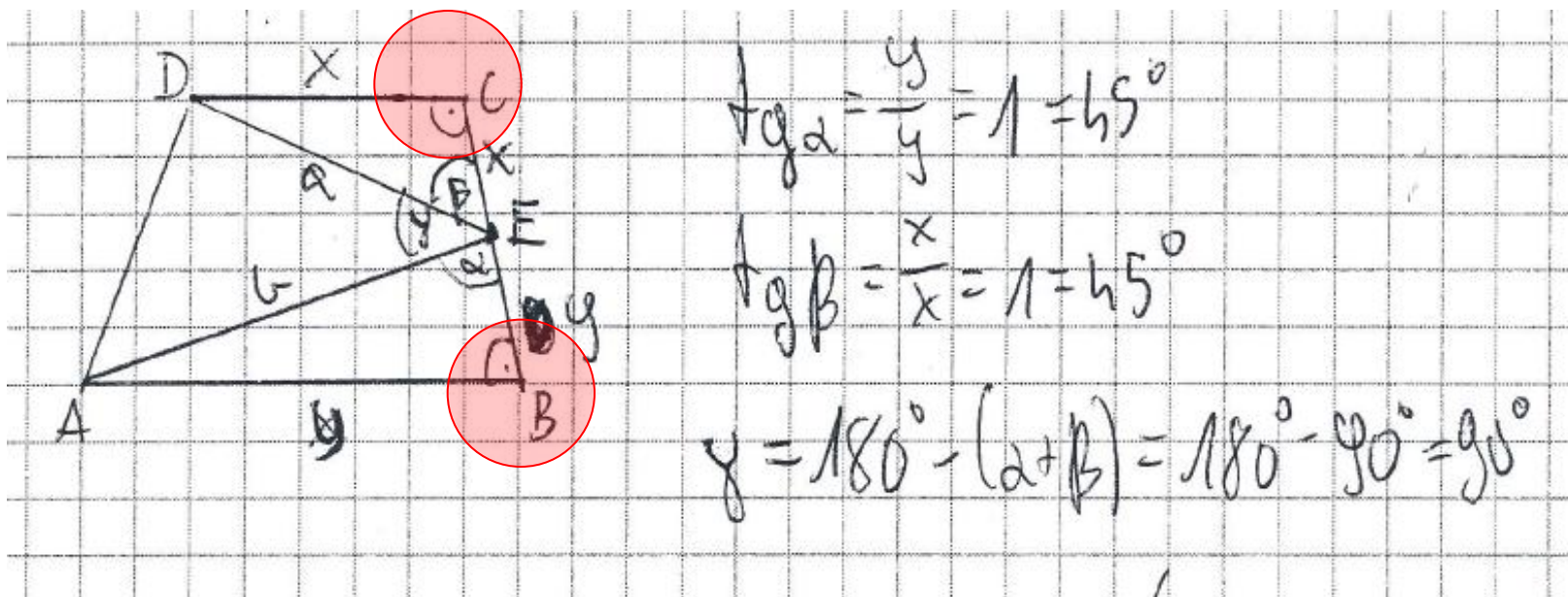
$$z^2 = 2x^2 + -2x^2 \cdot (-\cos \beta)$$

$$z^2 = 2x^2 + 2x^2 \cos \beta$$

$$d^2 = 2y^2 - 2y^2 \cos \beta$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$
 $= 150^\circ$
 $= 150^\circ$

$AB \parallel CD$
 $a = a$
 $b = b$

$EC \neq CD$

$e = a$
 $B \parallel EA$

$2a$
 A
 D

trapez
 równoboczny

trójkąt ECD
 równoboczny

60°
 a
 E
 a
 C
 60°

60° - jeden k
 ostry czwokąt
 czyli prosty
 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Trójkąt ABE jest
 równoboczny, więc

60°
 a
 A
 a
 B

czyli ostatecznie z
 kwadratu:

180°
 60°
 60°
 E

$\alpha = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ)$
 $\alpha = 60^\circ$
 $\angle AED = 90^\circ$

Odpowiedź: $\angle AED$ niezmiennie jest prosty.

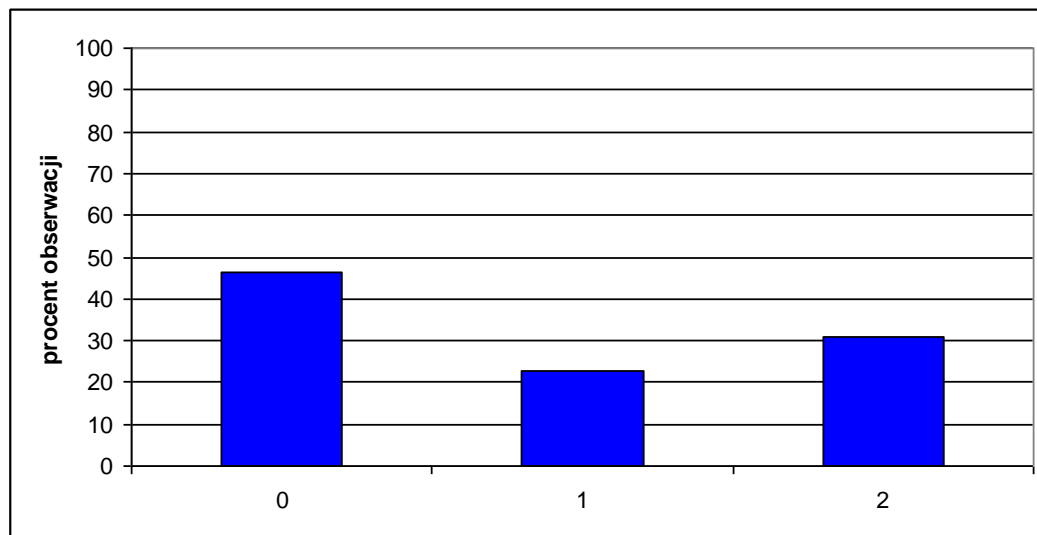
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 30. (2 pkt)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało, w zależności od metody rozwiązania na obliczeniu liczby wszystkich zdarzeń elementarnych lub liczby zdarzeń sprzyjających, albo na wykonaniu tabeli lub drzewa z zaznaczonymi prawdopodobieństwami.

0 punktów	1 punkt	2 punkty
46,30%	22,75%	30,95%



$$f_{op} = 11,88\%$$

$$t = 0,42$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
losujemy 2 razy
liczba wylosowana
 $P(n) \rightarrow$ suma liczb podzielna przez 3

suma 2 liczb podzielnych przez 3 w zbiorze $\{1; 2; \dots; 7\}$ jest równa 17

$\frac{1+2}{3} = 1 = 0$	$\frac{1+3}{3} = 2 = 0$	$\frac{2+2}{3} = 1 = 0$	$\frac{2+4}{3} = 2 = 0$	$\frac{2+7}{3} = 3 = 0$
$\frac{1+3}{3} = 1 > 0$	$\frac{1+6}{3} = 2 > 0$	$\frac{2+2}{3} = 1 > 0$	$\frac{2+5}{3} = 2 > 0$	
$\frac{1+4}{3} = 1 > 0$	$\frac{1+4}{3} = 2 > 0$	$\frac{2+3}{3} = 1 > 0$	$\frac{2+6}{3} = 2 > 0$	
$\frac{1+5}{3} = 0 > 0$				
$\frac{3+2}{3} = 1 > 0$	$\frac{3+4}{3} = 2 > 0$	$\frac{3+4}{3} = 3 > 0$	$\frac{4+2}{3} = 1 > 0$	$\frac{4+5}{3} = 3 = 0$
$\frac{3+5}{3} = 1 > 0$	$\frac{3+5}{3} = 2 > 0$		$\frac{4+2}{3} = 2 = 0$	$\frac{4+6}{3} = 3 > 0$
$\frac{3+6}{3} = 2 > 0$	$\frac{3+6}{3} = 3 > 0$		$\frac{4+3}{3} = 2 > 0$	$\frac{4+7}{3} = 3 > 0$
$\frac{5+2}{3} = 2 > 0$	$\frac{5+4}{3} = 3 = 0$	$\frac{5+4}{3} = 4 = 0$	$\frac{6+2}{3} = 2 > 0$	$\frac{6+4}{3} = 3 > 0$
$\frac{5+2}{3} = 2 > 0$	$\frac{5+5}{3} = 3 > 0$		$\frac{6+2}{3} = 2 > 0$	$\frac{6+5}{3} = 3 > 0$
$\frac{5+3}{3} = 2 > 0$	$\frac{5+6}{3} = 3 > 0$		$\frac{6+3}{3} = 3 = 0$	$\frac{6+7}{3} = 4 > 0$
$\frac{4+4}{3} = 2 > 0$	$\frac{4+4}{3} = 3 > 0$	$\frac{4+4}{3} = 4 > 0$		
$\frac{4+2}{3} = 3 = 0$	$\frac{4+5}{3} = 4 = 0$			
$\frac{4+3}{3} = 3 > 0$	$\frac{4+6}{3} = 4 > 0$			

mac wyrażenia, jest równa 5040

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$P(n) = \frac{17}{5040}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 30. (2 pkt)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

The handwritten solution on grid paper shows a probability tree for drawing two numbers from the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ with replacement. The tree branches from the first draw to the second draw, with outcomes labeled as 'podzielna przez 3' (divisible by 3) or 'niepodzielna przez 3' (not divisible by 3). The final calculation for the probability $P(A)$ is circled in red.

Tree structure and outcomes:

- First draw: 1 (1/7), 2 (1/7), 3 (1/7), 4 (1/7), 5 (1/7), 6 (1/7), 7 (1/7)
- Second draw (from 1): 1 (1/7), 2 (1/7), 3 (1/7), 4 (1/7), 5 (1/7), 6 (1/7), 7 (1/7)
- Second draw (from 2): 1 (1/7), 2 (1/7), 3 (1/7), 4 (1/7), 5 (1/7), 6 (1/7), 7 (1/7)
- Second draw (from 3): 1 (1/7), 2 (1/7), 3 (1/7), 4 (1/7), 5 (1/7), 6 (1/7), 7 (1/7)
- Second draw (from 4): 1 (1/7), 2 (1/7), 3 (1/7), 4 (1/7), 5 (1/7), 6 (1/7), 7 (1/7)
- Second draw (from 5): 1 (1/7), 2 (1/7), 3 (1/7), 4 (1/7), 5 (1/7), 6 (1/7), 7 (1/7)
- Second draw (from 6): 1 (1/7), 2 (1/7), 3 (1/7), 4 (1/7), 5 (1/7), 6 (1/7), 7 (1/7)
- Second draw (from 7): 1 (1/7), 2 (1/7), 3 (1/7), 4 (1/7), 5 (1/7), 6 (1/7), 7 (1/7)

Outcomes where the sum is divisible by 3 (circled in red):

- (1, 2) → 1+2=3
- (2, 1) → 2+1=3
- (3, 6) → 3+6=9
- (6, 3) → 6+3=9
- (4, 5) → 4+5=9
- (5, 4) → 5+4=9
- (6, 6) → 6+6=12
- (7, 5) → 7+5=12
- (5, 7) → 5+7=12

Final calculation (circled in red):

$$P(A) = \frac{15}{49} \cdot \frac{15}{49} + \frac{15}{49} \cdot \frac{27}{49} + \frac{27}{49} \cdot \frac{15}{49} = \frac{225}{1764} + \frac{405}{1764} + \frac{405}{1764} = \frac{1035}{1764}$$

Additional notes on the right side of the page:

- 15 liczb (15 numbers)
- 1+2=3
- 2+1=3
- 3+6=9
- 6+3=9
- 4+5=9
- 5+4=9
- 6+6=12
- 7+5=12
- 5+7=12



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$1+2=3$ $4+2=6$ $7+2=9$
 $1+5=6$ $4+5=9$ $7+5=12$
 $2+1=3$ $5+1=6$
 $2+4=6$ $5+4=9$
 $3+3=6$ $6+3=9$
 $3+6=9$ $6+6=12$

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
 $\frac{2}{36} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch takich liczb, aby ich suma była podzielna przez 3 z jednej kostki to:

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{36}$

a ze wszystkich możliwych drzewek to:

$\frac{2}{36} \cdot 4 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 30. (2 pkt)

Z zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $A = \{1, 2, 4, 7\}$
 $P(A) = \frac{4}{16}$

1	2	3	3	6	6
1	5	3	6	6	3
2	1	4	2	4	2
2	4	4	5	4	5
2	7	5	1		
		5	4		
		5	7		



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 30. (2 pkt)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$

$\Omega = \{1, 5, 1, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 6, 4, 5, 5, 1, 5, 4, 6, 3\}$

$\bar{\Omega} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$\bar{\Omega} = 36$
 $\text{bo } 6 \cdot 6$

1	1, 1 ; (1, 2) ; 1, 3 ; 1, 4 ; (1, 5) ; 1, 6 ;
2	(2, 1) ; 2, 2 ; 2, 3 ; (2, 4) ; 2, 5 ; 2, 6 ;
3	3, 1 ; 3, 2 ; (3, 3) ; 3, 4 ; 3, 5 ; (3, 6) ;
4	4, 1 ; (4, 2) ; 4, 3 ; 4, 4 ; (4, 5) ; 4, 6 ;
5	(5, 1) ; 5, 2 ; 5, 3 ; (5, 4) ; 5, 5 ; 5, 6 ;
6	6, 1 ; 6, 2 ; (6, 3) ; 6, 4 ; 6, 5 ; (6, 6) ;

takie liczby które dzielą się przez 3 to
 3, 6, 12 - w tym przypadku.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 30. (2 pkt)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

liczba cyfr = 4

liczba cyfr podzielana przez „3” = 2

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$$

Odp: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb podzielnych przez „3” jest równe $\frac{4}{49}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 30. (2 pkt)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $\bar{\Omega} = 7$
 $\bar{A} = 13$
 $P_A = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{13}{7} \approx 1,857$

$A = \left\{ \begin{array}{l} (1,2) (1,5) (2,4) (2,7) (2,1) \\ (3,6) (4,2) (4,5) (5,4) (5,7) \\ (6,3) (7,2) (7,5) \end{array} \right\}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 30. (2 pkt)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

	1	2	3	4	5	6	7
1		•			•		
2			•				•
3				•		•	
4		•				•	
5			•				•
6				•		•	
7		•					•

$\Omega = 49$

$P(A) = \frac{10}{49}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$4+2=3=3$
 $2+7=3$

1 - 2 razy $(1+2), 1+5,$
 2 - 3 razy $2+1, 2+4, 2+7,$
 3 - 2 razy $3+3, 3+6,$
 4 - 2 razy $4+2, 4+5,$
 5 - 3 razy $5+1, 5+4, 5+7,$
 6 - 2 razy $6+3, 6+6,$
 7 - 2 razy $7+2, 7+5$

$P(A) = \frac{1}{7} \cdot 7 + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + 7 = 1$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 31. (4 pkt)

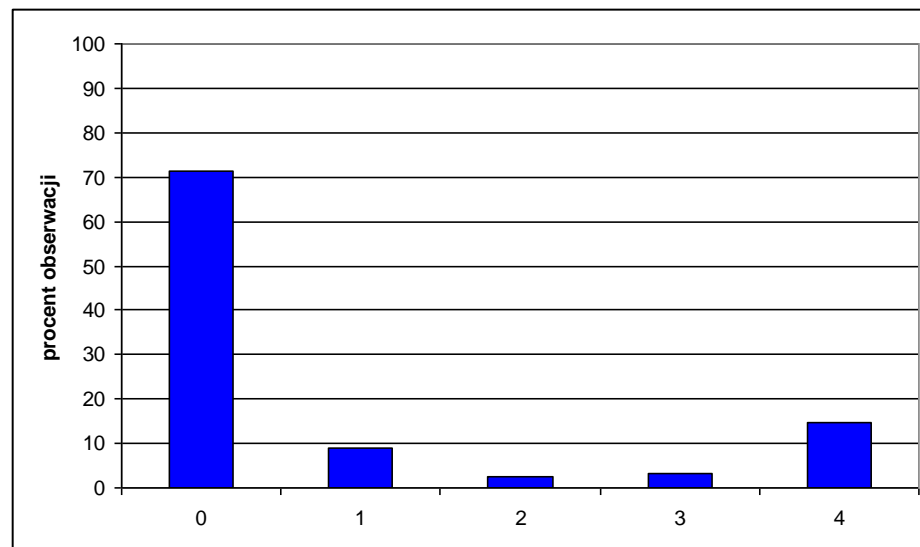
Okrąg o środku w punkcie $S = (3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na zapisaniu równania z jedną niewiadomą, z którego można obliczyć współrzędne punktu styczności.

0 punktów	1 punkt	2 punkty	3 punkty	4 punkty
71,38%	8,82%	2,50%	3,14%	14,16%

$$f_{op} = 13,97\%$$

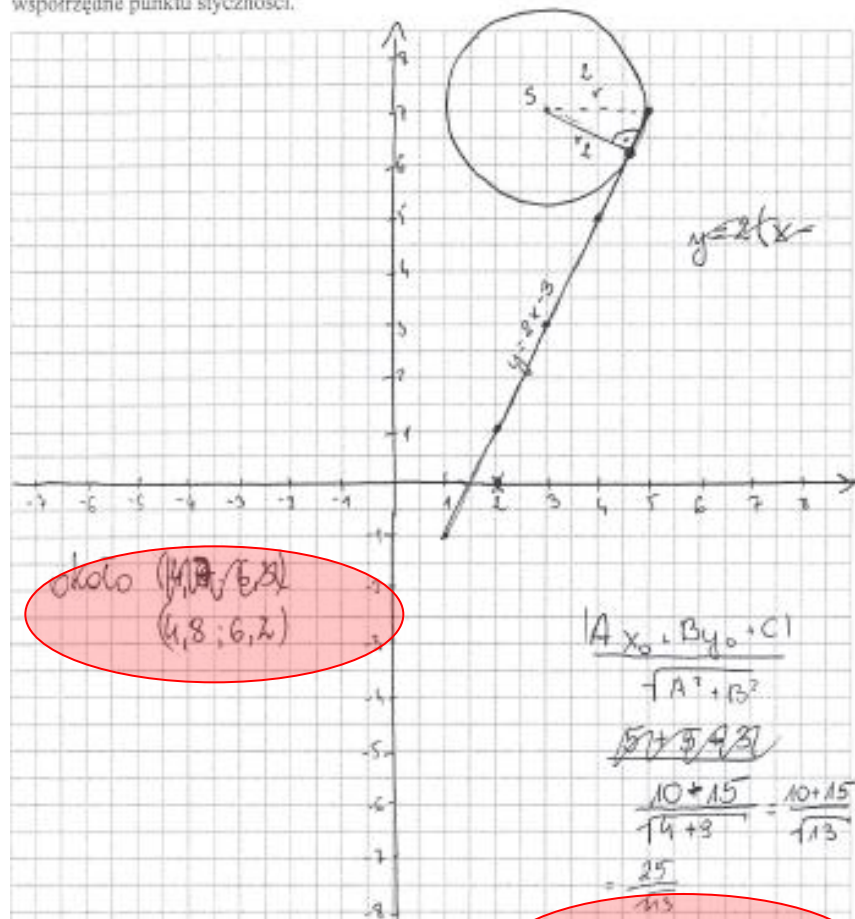
$$t = 0,20$$





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Okrąg o środku w punkcie $S = (3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.



okolo $(4,8; 6,2)$
 $(4,8; 6,2)$

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\frac{|5 + 14 - 3|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{10 + 15}{\sqrt{13}} = \frac{25}{\sqrt{13}}$$

Odpowiedź: punkt ten znajduje się w punkcie okolo $(6,2; 6,3)$
 $(6,2; 6,3)$ $(4,8; 6,3)$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Okrąg o środku w punkcie $S = (3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

nie, że nie ładny rysunek, ale jakby był ołówek, byłaby i punktka i wypadłoby ładniej!

$y = 2x - 3$
 ~~$y = 0 - 3$~~
 ~~$y = -3$~~
 ~~$y = 1 - 3$~~
 ~~$y = -2$~~
 ~~$y = 2 - 3$~~
 ~~$y = -1$~~

$r = 5$

$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 25$
 $y = 2x - 3$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 = 25$
 $y = 2x - 3$

$x^2 - 6x + 9 + (2x - 3)^2 - 14(2x - 3) + 49 - 25 = 0$
 $x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 12x + 9 - 28x + 42 + 49 - 25 = 0$
 $5x^2 - 46x + 84 = 0$

$\Delta = 2116 - 4 \cdot 5 \cdot 84 = 2116 - 1680$
 $\Delta = 436$
 $\sqrt{\Delta} = \sqrt{436} = 2\sqrt{109}$

$x_1 = \frac{46 - 2\sqrt{109}}{10}$
 $x_2 = \frac{46 + 2\sqrt{109}}{10}$

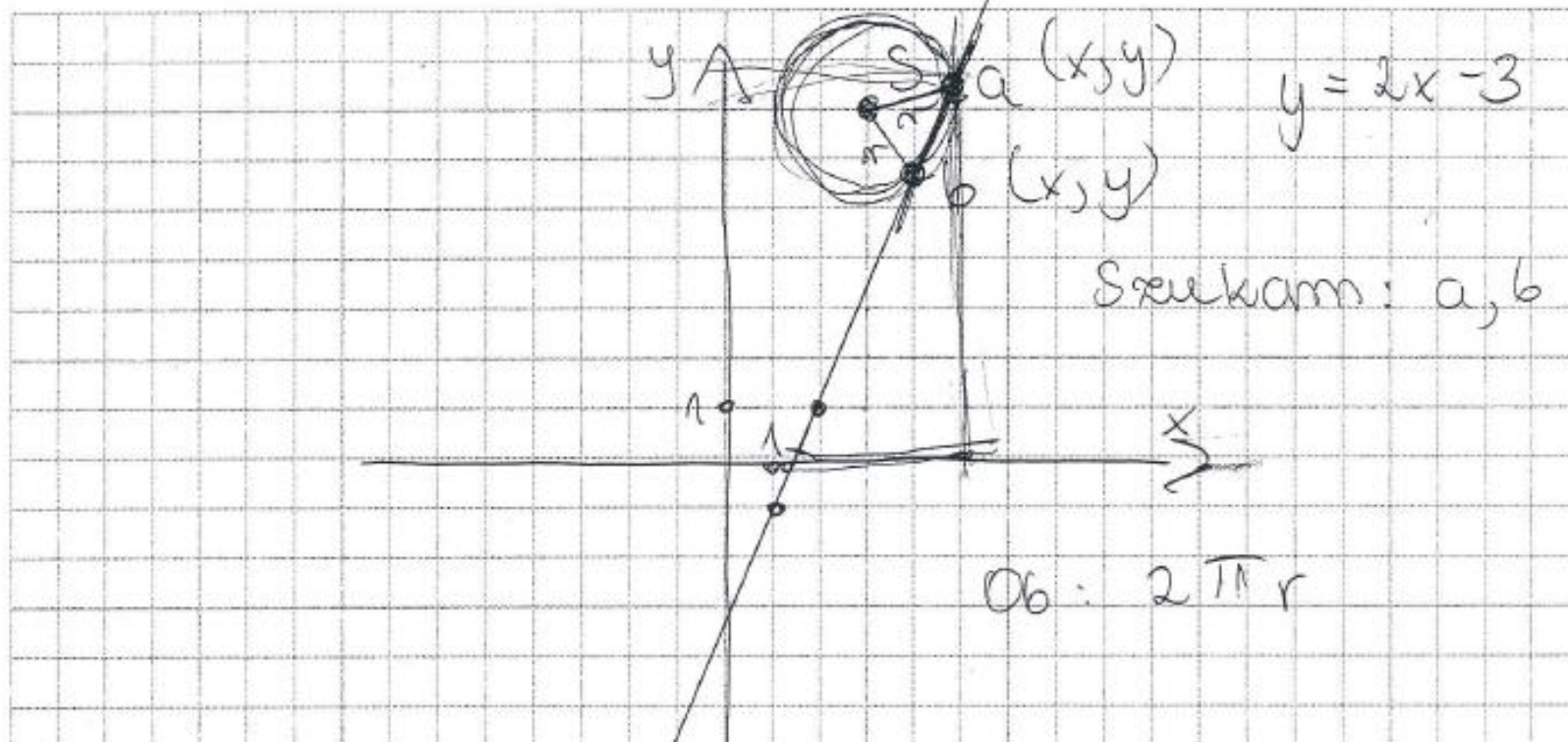
$y_1 = 2 \cdot \frac{46 - 2\sqrt{109}}{10} = \frac{46 - 2\sqrt{109}}{5}$
 $y_2 = 2 \cdot \frac{46 + 2\sqrt{109}}{10} = \frac{46 + 2\sqrt{109}}{5}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

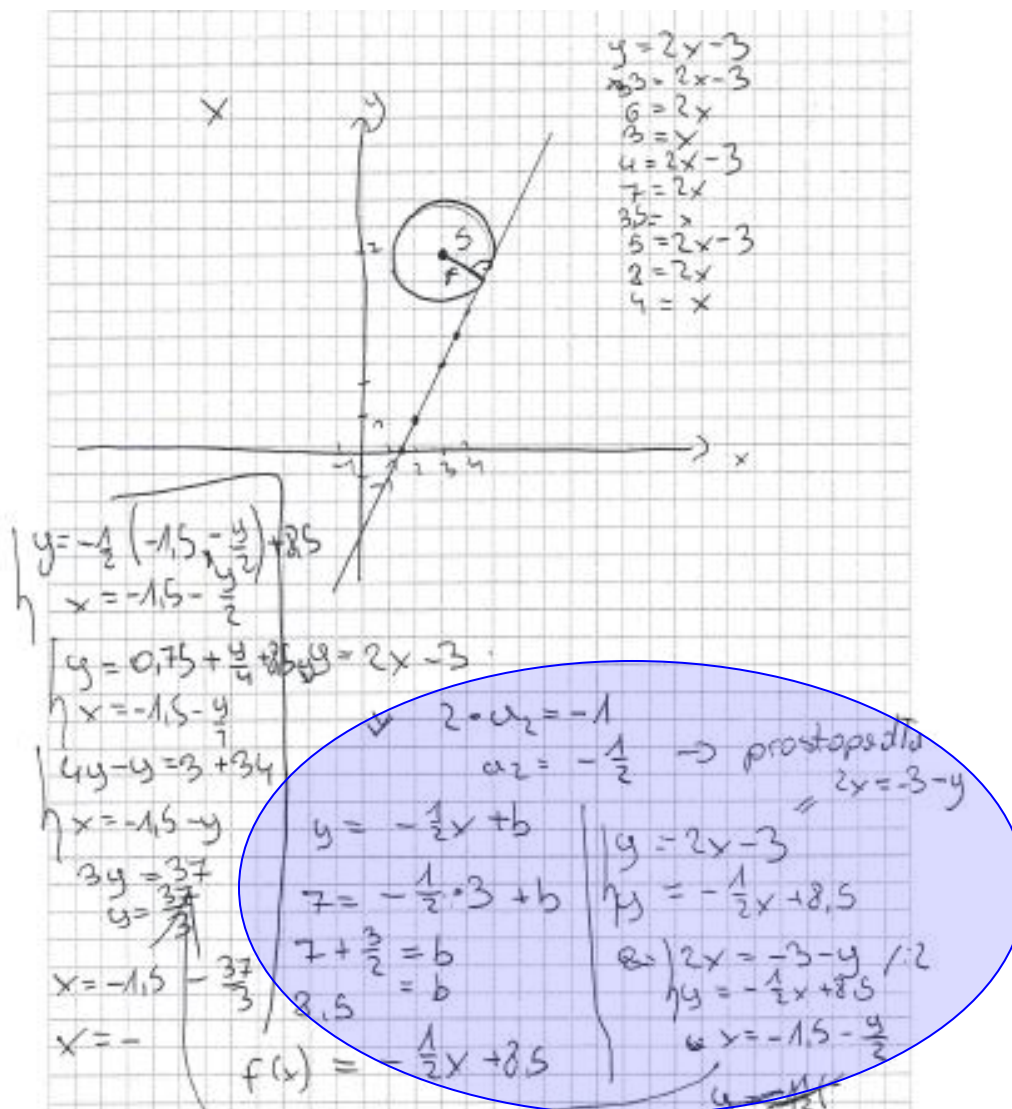
Zadanie 31. (4 pkt)

Okrąg o środku w punkcie $S = (3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.



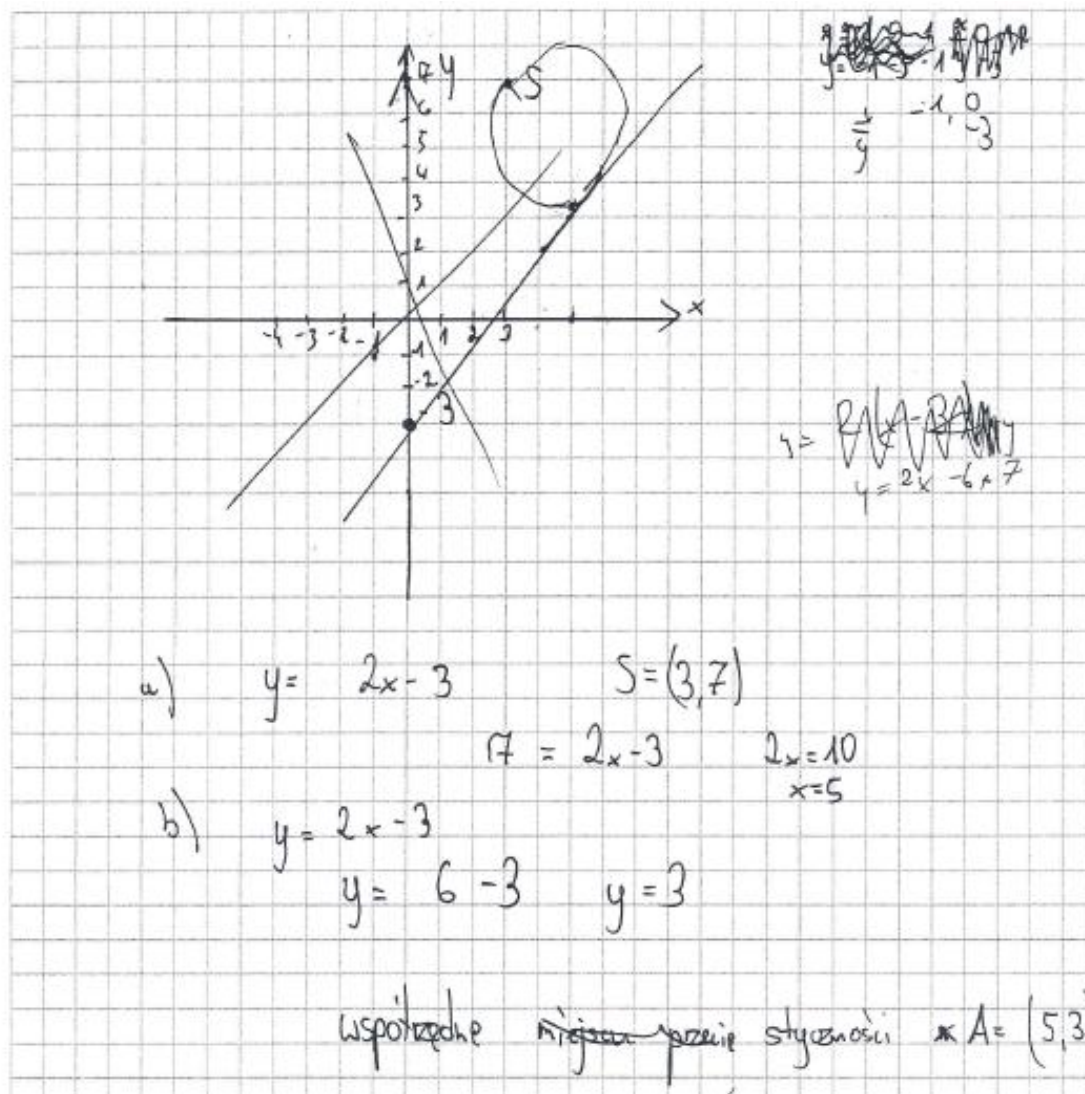


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$(x-3)^2 + (y-7)^2 = r^2$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2x-3$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 2x - 3$

$x^2 - 8x + y^2 - 14y = -61$

$-8x = -y^2 + 14y - x^2 - 61$

$r=2$

$B=0$

$0 = 2x - 3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$y = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3$

$y = 0$

x	1	2	0
y	-1	1	-3

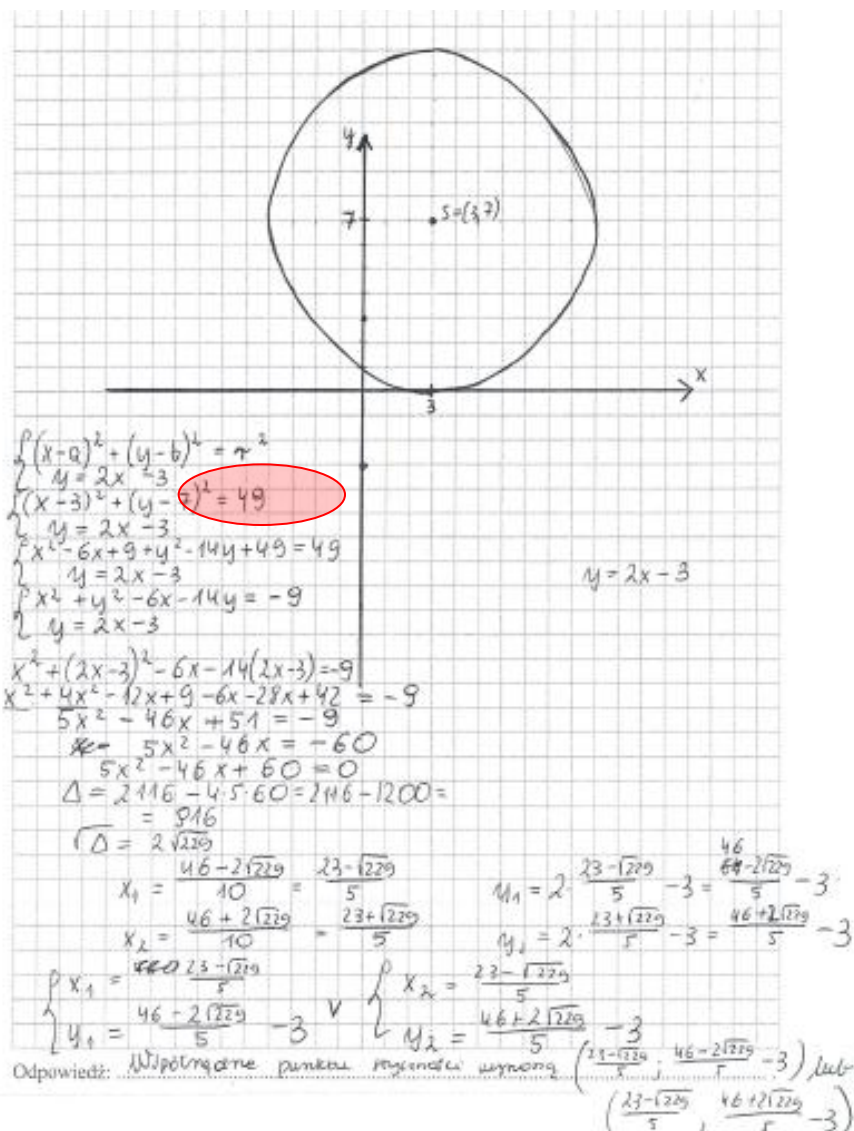
$(\frac{3}{2} - 3)^2 + (0 - 7)^2 = r^2$

$\frac{9}{4} + 49 =$

Odpowiedz: Punkt styczności wyznosi $(\frac{3}{2}, 0)$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 32. (5 pkt)

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrowkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na zapisaniu równania z jedną niewiadomą.

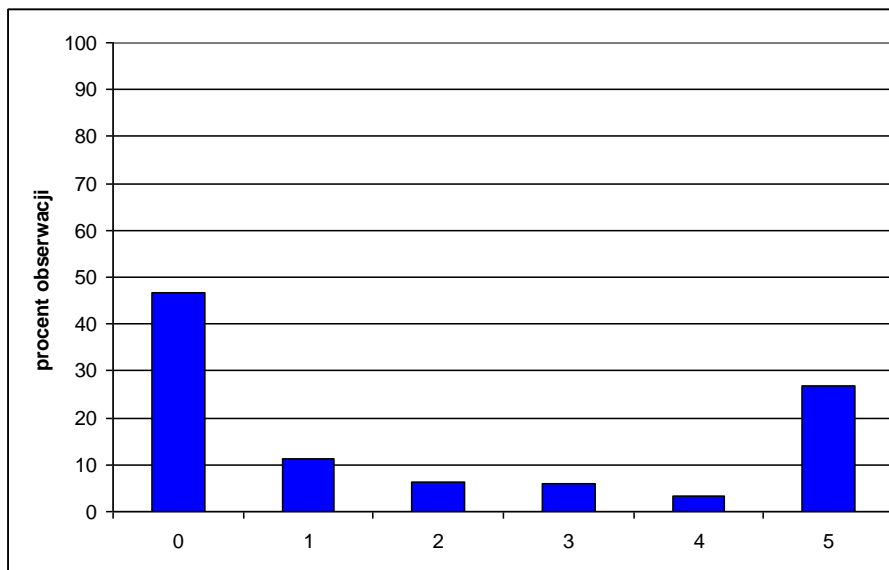


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

0 punktów	1 punkt	2 punkty	3 punkty	4 punkty	5 punktów
46,53%	11,16%	6,33%	5,86%	3,20%	26,90%

$$f_{op} = 11,17\%$$

$$t = 0,38$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 32. (5 pkt) (turysta)

Maj 2011	0 punktów	1 punkt	2 punkty	3 punkty	4 punkty	5 punktów
	46,53%	11,16%	6,33%	5,86%	3,20%	26,90%

Listopad 2010	0 punktów	1 punkt	2 punkty	3 punkty	4 punkty	5 punktów
	83,8%	1,9%	2,2%	3,9%	3,6%	4,6%

Maj 2010	0 punktów	1 punkt	2 punkty	3 punkty	4 punkty	5 punktów
	37%	7%	15%	9%	5%	28%

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 32. (5 pkt) (turysta)

		Matura majowa, maj 2011 – Zadanie 32.						Razem
		0	1	2	3	4	5	
Matura próbna, listopad 2010 Zadanie 34.	0	41,2%	10,8%	6,4%	5,8%	2,5%	15,9%	82,6%
	1	0,3%	0,3%	0,2%	0,2%	0,1%	0,9%	2,0%
	2	0,3%	0,2%	0,2%	0,3%	0,2%	1,3%	2,4%
	3	0,2%	0,3%	0,2%	0,4%	0,3%	2,8%	4,2%
	4	0,1%	0,0%	0,1%	0,1%	0,2%	3,3%	3,9%
	5	0,1%	0,0%	0,0%	0,1%	0,1%	4,6%	4,9%
	Razem	42,1%	11,6%	7,2%	6,8%	3,4%	28,8%	100%



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

112 km każdy obraci tyle samo
półki 3 dni więcej to 12 km mniej każdego dnia

100% → 112 km
x dni → 112 km

112 = y km

$x \cdot 3 \Rightarrow \left(\frac{112}{y}\right) - 12 \Rightarrow$ ile dni więcej by szło

<p>liczba dni</p> <p>$112 : 2 = 56$ $56 - 12 = 44$ $44 \cdot (2+3) = 220$ km odpada 20 dni km nie pasuje do treści</p>	<p>liczba dni</p> <p>$112 : 3 = 37\frac{1}{3}$ $37\frac{1}{3} - 12 = 25\frac{1}{3}$ $25\frac{1}{3} \cdot (3+3) = 151,9$ km odpada, za dużo km nie pasuje do treści</p>
<p>liczba dni</p> <p>$112 : 4 = 28$ $28 - 12 = 16$ $16 \cdot (4+3) = 112$ km³ spadnie z treści zadania</p>	<p>liczba dni</p> <p>$112 : 5 = 22,4$ $22,4 - 12 = 10,4$ $10,4 \cdot (4+4) = 83,2$ odpada, za mało km nie pasuje do treści</p>

Turyści chcieli przez 4 dni pokonać codziennie trasę 28 km. Gdyby przesunąć o 3 dni więcej wędrówkę wydłużyłoby się do 7 dni, a kilometrów do 16 km dziennie.

~~Ważne~~ Dostawca do tego metoda prób i błędów. Gdyby zwiększyć liczbę dni powyżej 4 to końcowy wynik byłby mniejszy od 112, gdyby zaś liczbę dni zmniejszyć, wynik byłby większy, więc pasują tylko 4 dni wędrówki po 28 km każdy!



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$S = 112 \text{ km}$ - trasa turysty w kilometrach pokonywana każdego dnia przez tyle samo kilometrów

~~$(A+B)$~~

~~$\frac{112}{x}$~~

$\frac{112}{x+3}$

$\frac{112}{x-12}$

x - liuba kilometrów
 y - dni

$(y+3)(x-12) = 112$

~~$(x+3) \cdot \frac{112}{y} = 112$~~

$y+3 = 112$

$y =$

$\frac{112}{x} = y$

$(x+3)(y-12) =$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$y = \text{odległość} = 112 \text{ km}$
 $x = \text{czas}$ w której odbywał wyścig
 $3x = y + 12$

~~$y = 112$~~ ~~$y + 12 = 3 + x$~~ ~~$112 + 12 = 3 + x$~~ ~~$124 = 3 + x$~~

$x = y$

$x = 112$
 $x + 3 = y + 12$
 ~~$x + 3 = 112 = y + 12$~~
 ~~$3 = 112 = y + 109$~~

$xy + 12x = 112x + 336$
 $x(y + 12) = 112x + 336 \quad | :x$
 $y + 12 = 112 + \frac{336}{x} \quad | -12$
 $y = 100 + \frac{336}{x} \quad | \cdot x$
 $xy = 436$

$x + 3 = \frac{436}{x} + 12 \quad | -12$
 $x - 9 = \frac{436}{x} \quad | \cdot x$
 $x(x - 9) = 436$
 $x^2 - 9x = 436$
 $x^2 - 9x - 436 = 0$
 $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -436$
 $\Delta = 81 + 1744 = 1825$
 $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1825} \sim 42$

$x_1 = \frac{9 - \sqrt{1825}}{2}$ *nie może*
 $x_2 = \frac{9 + \sqrt{1825}}{2}$
 $\frac{9 + 42}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

*tyje kilometrów
by przejechał
płynęł z prędkością
optymalną*



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$s = 112 \text{ km}$

x dni po y km
 $x+3$ $y-12$ km

$$\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3)(y-12) = 112 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ xy + 3y - 12 - 36 = 112 \end{cases}$$

$$112 + 3y - 12 - 36 = 112$$

$$3y = 48$$

$$y = 16$$

Odp. Dziennie turysta przechodził 16 km.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

112 liczba km
x - liczba dni
y - liczba km dojeżdżone
~~x = 112~~

112y6 ~~112y6~~

$$\frac{112}{y} \cdot (-12)$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3) \cdot (y-12) = 112 \end{cases}$$

$$y = \frac{112}{x}$$

$$(x+3) \left(\frac{112}{x} - 12 \right)$$

$$\cancel{112} - 12x + \frac{336}{x} - 36 = \cancel{112}$$

$$-12x^2 - 36x + 336$$

$$x = \frac{112}{y}$$

$$\left(\frac{112}{y} + 3 \right) \cdot (y - 12) = 112$$

$$112 - \frac{1344}{y} + 3y - 36 = 112$$

$$3y - \frac{1344}{y} - 36 = 0 \quad // \cdot y$$

$$3y^2 - 36y - 1344 = 0$$

~~112~~



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

x - liczba dni
 y - liczba kilometrów przebytych dziennie

$$\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3)(y-x \cdot 12) = 112 \end{cases}$$

$$x = \frac{112}{y} \quad y = \frac{112}{x}$$

$$(x+3) \left(\frac{112}{x} - 12 \right) = 112$$

$$112 - 12x + \frac{336}{x} - 36 = 112$$

$$-12x^2 + 336 - 36x = 0$$

$$12x^2 - 36x + 336 = 0$$

$$\Delta = 1296 + 4 \cdot 12 \cdot 336 = 1296 + 16128 = 17424$$

$$\sqrt{\Delta} = 132$$

$$x_1 = \frac{36 - 132}{24} = \frac{96}{24} = -4 \quad \text{nie może być bo liczba ujemna}$$

$$x_2 = \frac{36 + 132}{24} = \frac{168}{24} = 7$$

$$4 \cdot y = 112$$

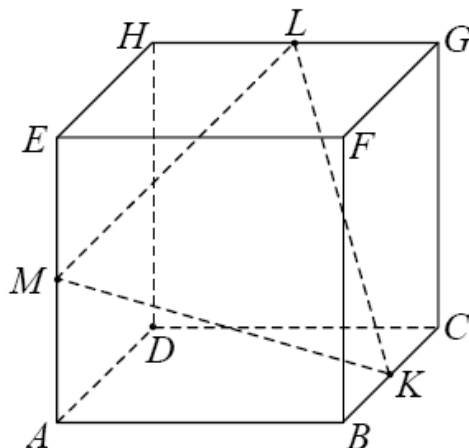
$$y = \frac{112}{7} = 16$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 33. (4 pkt)

Punkty K , L i M są środkami krawędzi BC , GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta KLM .

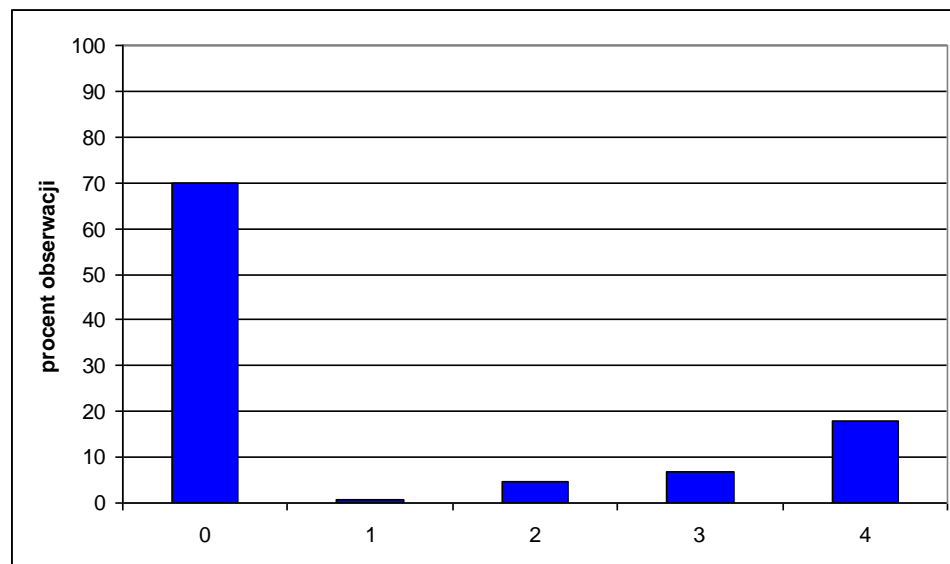


Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na obliczeniu długości boków trójkąta KLM , lub obliczenie długości jednego boku wraz z uzasadnieniem, że trójkąt KLM jest równoboczny.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 33. (4 pkt)

0 punktów	1 punkt	2 punkty	3 punkty	4 punkty
70,03%	0,80%	4,68%	6,74%	17,75%

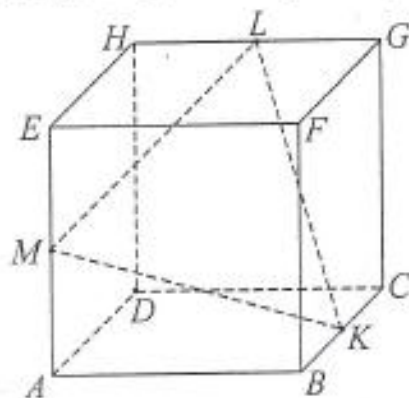


$$f_{op} = 31,01\%$$

$$l = 0,25$$



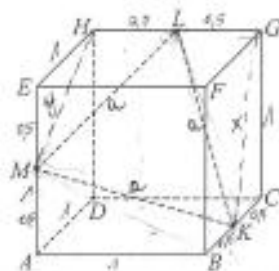
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



$a = 1$ - długość krawędzi sześcianu
 Trójkąt KLM jest równoboczny
 $|MK| = |BL| = 1$ - przeciwko kwadratu
 $|MK| = |BL| = \sqrt{2}$
 $P = \frac{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



$$0,5^2 + 1^2 = x^2$$

$$1,25 = x^2$$

$$x = 1,12$$

$$\Delta KGL = 0,5^2 + 1,12^2 = a^2$$

$$a^2 = 1,5$$

$$a = 1,23$$

$$0,5^2 + 1^2 = y^2$$

$$y = 1,12$$

~~Pole~~

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

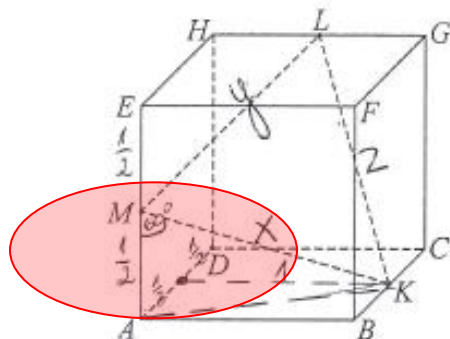
$$P = \frac{(1,23)^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{1,5129 \sqrt{3}}{4}$$

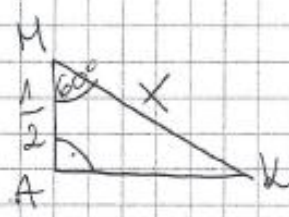
$$\text{Odp.} = P = \frac{1,5129 \sqrt{3}}{4}$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



$P_c = 6a^2 = 6 \quad a = 1$
 $180^\circ : 3 = 60^\circ$
 $\frac{1/2}{x} = \cos 60^\circ$
 $\frac{1/2}{x} = \frac{1}{2}$
 $\frac{1/2}{2} \cdot \frac{2}{1} = x$
 $x = 1$


 $x = y = 2$
 $|KM| = |ML| = |LK|$
 $P_{\Delta KLM} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{4}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$z^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4}$
 $z = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$x^2 = 1 + \frac{1}{4}$
 $x^2 = \frac{5}{4}$
 $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$|MK| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

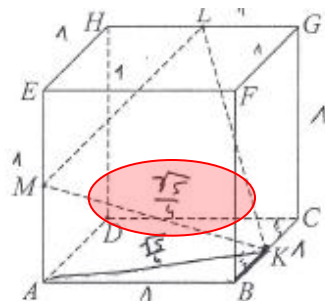
$o^2 = 1 + \frac{1}{4}$
 $o = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$|ML| = |MK| = |KL| = \frac{\sqrt{6}}{2} \leftarrow \text{trójkąt równoboczny o boku długości } a = \frac{\sqrt{6}}{2}$

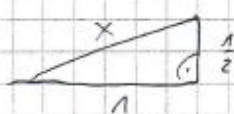
$P_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
 $P_{\Delta} = \frac{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
 $P_{\Delta} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



$$P_{\text{przeciętna}} = 6j^2$$



$$1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2$$

$$1 + \frac{1}{4} = x^2$$

$$x^2 = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{4} = a \quad \frac{a\sqrt{3}}{2} = h$$

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} =$$

$$\frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = h$$

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{20}}{32} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{20}}{64} j^2$$

$$\frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{2} = h$$

$$h = \frac{\sqrt{15}}{8}$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$x^2 = 1^2 + \frac{1}{2}^2$
 $x^2 = 1 + \frac{1}{4}$
 $x^2 = \frac{5}{4}$
 $x = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$y^2 = \frac{1}{2}^2 + \frac{5}{4}$
 $y^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4}$
 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_{\Delta KLM} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{3}{4} \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dziękujemy za uwagę