KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROGRAM OPERACYJNY KAPITAŁ LUDZKI
Priorytet III, Działanie 3.2

Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UMIEJĘTNOŚCI MATEMATYCZNE UCZNIÓW

NA PODSTAWIE WYNIKÓW MATURY Z MATEMATYKI MAJ 2011

Poziom rozszerzony egzaminu maturalnego

Warszawa, 10 -11 września 2011 Konferencja dla doradców metodycznych i konsultantów ds. matematyki

Do egzaminu na poziomie rozszerzonym przystąpiło ogółem 58 312 uczniów.

To 15,68% zdających, którzy przystąpili do egzaminu maturalnego w maju 2011 roku.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan arkusza PR – maj 2011

Dział Podstawy Programowej	Liczby, wyrażenia algebraiczne, równania	Funkcje, ciągi liczbowe	Geometria z elementami trygonometrii	Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki
Numer zadania	**1., 2., 3.**	**4., 5.**	**6., 7., 8., 10., 11.**	**9., 12.**
Razem	14 pkt	8 pkt	21 pkt	7 pkt

Interpretacja wskaźnika łatwości zadania				
0 – 0, 19	**0, 20 – 0, 49**	**0, 50 – 0, 69**	**0, 70 – 0, 89**	**0, 90 – 1**
bardzo trudne	***trudne***	***umiarkowanie trudne***	***łatwe***	***bardzo łatwe***
Arkusz dla poziomu rozszerzonego, maj 2011				
9., 10.	**1., 4., 5., 7., 12.**	**2., 3., 6., 8., 11.**	----------	---------

Zadanie 1 (4 punkty)	Standard V (ROZ)

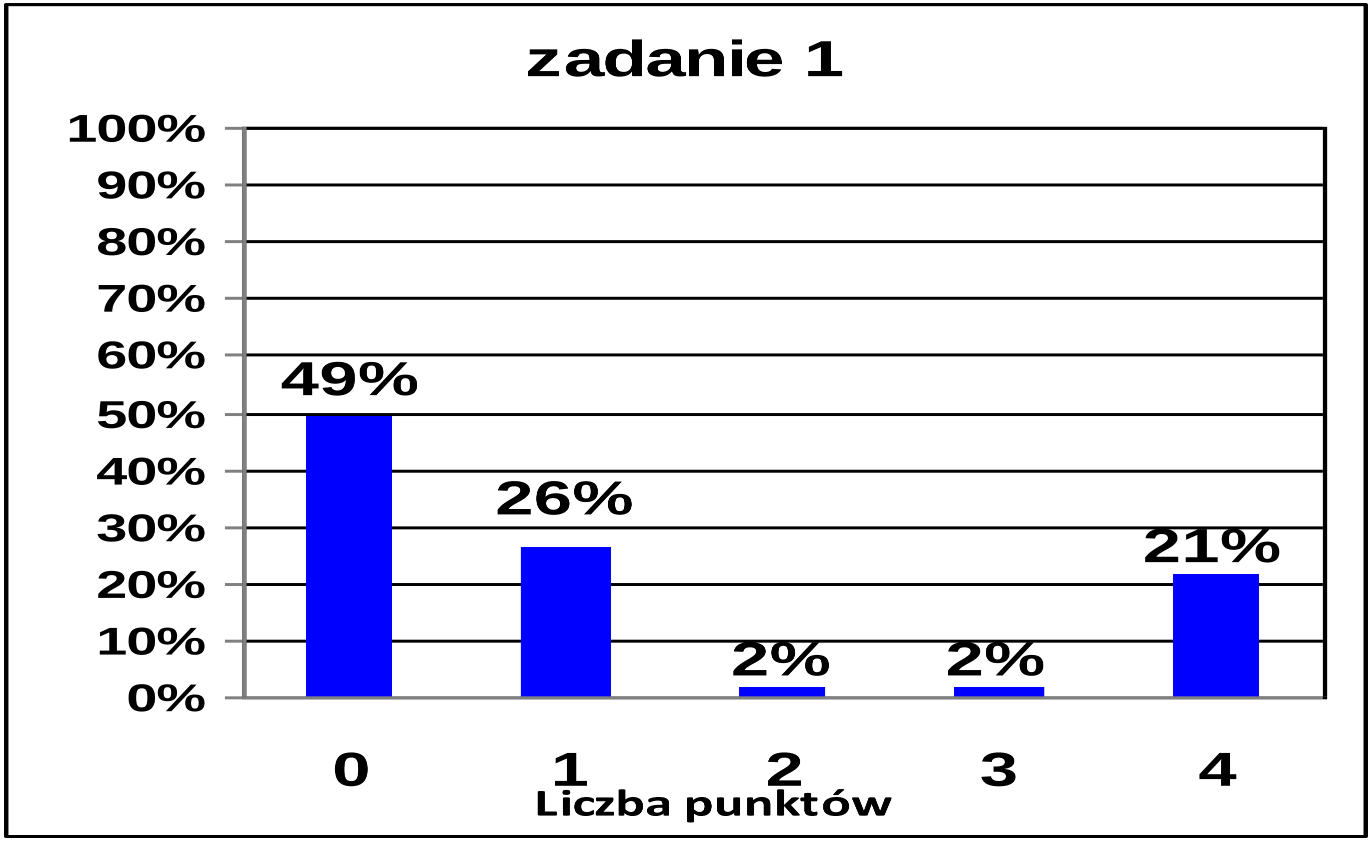
Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6-2k^4+k^2$ jest podzielna przez 36.

Zadanie **trudne**: ł=0,29
Opuszczenia: f_{op}=3,1%

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na wykazaniu podzielności liczby *n* przez 2 i przez 3 albo stwierdzeniu, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$\boxed{k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^3 - 2k^2 + 1)}$

$(k^3 - 2k^2 + 1) : (k-1) = k^2 - k + 1$

$-k^3 + k^2$

$-k^2 + 1$

$+k^2 - k$

$k + 1$

$-k + 1$

$=$

$k^2(k-1)(k^2-k+1) = k^6 - 2k^4 + k^2$

$k=0 \vee k=1 \qquad \Delta = 1-4<0$

$\frac{k^2(k-1)(k^2-k+1)}{36}$

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

zał.: $k \in C$

teza $k^6 - 2k^4 + k^2$

$k^2 = t$, $t \in C$

$t^3 - 2t^2 + t = t(t^2 - 2t + 1) = t(t-1)^2$

$f(x) = t(t-1)^2$

$f(x) = k^2(k^2-1)^2$

$f(x) = k^2[(k-1)(k+1)]^2$

$f(x) = k^2(k-1)^2(k+1)^2$

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$k \in C$

$k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^4 - 2k^2 + 1) =$

$= k^2(k^4 - k^2 - k^2 + 1) = k^2[k^2(k^2-1) - (k^2-1)] =$

$= k^2[(k^2-1)(k^2-1)] = k^2 \cdot (k^2-1)^2 = k^2[(k-1)(k+1)]^2$

dla $k = 0 \wedge k = 1$ liczba jest równa 0.

dla $k > 1$, dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^2[(k-1)(k+1)]^2$ jest podzielna przez 36.

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^4 - 2k^2 + 1)$

$\boxed{= k^2(k^2-1)^2 = k^2(k+1)(k-1)}$

$\cancel{(k-1)\cdot(k+1)\cdot k^2}$

$(k-1)\cdot k^2 \cdot (k+1)$

są to trzy kolejne cyfry, które wymnożone przez siebie są podzielne przez 3 (jedna z trzech kolejnych cyfr jest zawsze podzielna przez 3)

Środkowym wyrazem jest jednak k^2, co sprawia, że iloczyn cyfr wzrasta.

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = 36n$, $\quad n \in C$

$k^2(k^2 - 1)^2 = 36n$ $\quad p, m \in C$

$k(k^2 - 1) = 6n$

$\begin{cases} k = 3m \\ (k^2 - 1) = 2p \end{cases} \vee \begin{cases} k = 2p \\ k^2 - 1 = 3m \end{cases}$

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6-2k^4+k^2$ jest podzielna przez 36.

$k \in C$

k^3-2k

$\cancel{k^6-2k^4+k^2 = k^2(k^4-2k^2+1) = k^2(k+1)(k^2-1) = k^2(k+1)(k+1)(k-1)}$

$$k^6-2k^4+k^2 = \underbrace{k^2(k^4-2k^2+1)} = \underbrace{k^2(k-1)(k^3+k^2+1)}$$

liczba ta składa się z trzech iloczynów zatem jest podzielna przez 3.

z tego wynika, że jest podzielna przez 2

Skoro jest podzielna przez 3 oraz 2 to oznacza, że jest podzielna przez 6 (3×2)

skoro jest podzielna przez 6 to jest podzielna przez 36 (6×6)

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$k^2(k^4 - 2k^2 + 1)$

$(k^2 - k)(k^2 + k)$

$(k - \sqrt{k})(k + \sqrt{k})(k -$

$k^2(k^2 - 1)$

$k^2(k-1)(k+1)$

$\underline{(k-1)k^2(k+1)}$

Są to trzy kolejne liczby całkowite, z których druga jest podniesiona do kwadratu.

Aby liczba była podzielna przez 36 musi być również podzielna przez 6, czyli także przez 2 i 3.

I Jeśli k jest parzyste

Liczba parzysta podniesiona do kwadratu daje liczbę parzystą a wymnożona przez kolejne liczby nieparzystych daje parzystą!

II Jeśli k jest nieparzyste

Liczba nieparzysta podniesiona do kwadratu daje liczbę nieparzystą, jednak po wymnożeniu przez liczbę parzystą otrzymamy również liczbę parzystą!

Są także podzielne przez 3
a więc także 6 i 36
Co należało dowieść!

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$k = 1 \quad \vee \quad k = -1$

$1 - 2 + 1 = 0$

$k = 2 \quad \vee \quad k = -2$

$64 - 2 \cdot 16 + 4 = 36$

$k = 3 \quad \vee \quad k = -3$

$729 - 2 \cdot 81 + 9 = 576 = 36 \cdot 16$

$k = 4 \quad \vee \quad k = -4$

$4096 - 2 \cdot 256 + 16 = 3600 = 36 \cdot 100$

$k = n$

$n^6 - 2n^4 + n^2 = 36 \cdot b \qquad , b \in C$

$k = n + 1$

$(n+1)^6 - 2(n+1)^4 + (n+1)^2 = n^6 + 6n^5 + 15n^4 + 60n^3 + 15n^2 +$

$6n + 1 - 2(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + n^2 + 2n + 1 =$

$= n^6 + 6n^5 + 15n^4 + 60n^3 + 15n^2 + \cancel{6n} + 1 - 2n^4 - 8n^3 - 12n^2 - \cancel{8n} - 2$

$+ n^2 + \cancel{2n} + 1 = n^6 + 6n^5 + 13n^4 + 52n^3 + 4n^2 - 1 =$

$= n^6 - 2n^4 + n^2 + 6n^5 + 15n^4 + 52n^3 + 3n^2 - 1 =$

$= 36 \cdot b + 6n^5 + 15n^4 + 52n^3 + 3n^2 - 1$

dla kolejnych liczb całkowitych liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36

Zadanie 1. *(4 pkt)*
Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6-2k^4+k^2$ jest podzielna przez 36.

$k^6-2k^4+k^2 = \cancel{k^2(k^4+1)} = k^2(k^4-2k^2+1) = k^2(k^2-1)(k^2-1)$

$k^4-2k^2+1 = (k^2-1)^2$ $\quad$ $k=2 \Rightarrow 4\cdot(4-1)(4-1) = 4\cdot3\cdot3 = 36$

$k^2=t$ $\quad$ $k=3 \Rightarrow 9\cdot(9-1)(9-1) = 9\cdot8\cdot8 = 576 = 16\cdot36$

$t^2-2t+1=(t-1)^2$

Odp.: Kwadrat liczby całkowitej i iloczyn kwadratów liczb o 1 mniejszych daje liczbę podzielną przez 36

$729 - 2 \cdot 81 + 9$

$64 - 2 \cdot 16 + 4 =$

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$k \in C$

$k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^4 - 2k^2 + 1)$

$k^6 - 2k^4 + k^2 = \cancel{k^4(k^2+2)+k^2} \quad \cancel{k^2(k^4+1)2k^4}$

$k^6 - 2k^4 + k^2 = (k^3 - k)^2 = (k(k^2-1))^2$

dla każdej liczby k

a) parzystej ~~k 2/k~~ k jest podz. na 2 i k^2-1 jest podz przez 3, więc $k(k^2-1)$ jest podzielne przez 6, ~~więc~~ a kwadrat liczby podzielnej przez 6 jest podzielny przez 36

b) nieparzystej k, ~~k^2-1 jest podzielny przez 6~~ ~~$(k-1)(k+1)$~~
$k^2-1 = (k-1)(k+1)$ jest podzielne przez 6, a kwadrat liczby podzielnej przez 6 jest podzielny przez 36

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$k^6 - 2k^4 + k^2$

$k^2(k^4 - 2k^2 + 1)$

$k^2(k^2-1)^2$

$k^2((k-1)(k+1))^2$

$k^2(k-1)^2(k+1)^2$

$(k(k-1)(k+1))^2$ $\quad ((k-1)k(k+1))^2$

liczbę 36 można zapisać również jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych podniesionych do kwadratu

$(1\cdot 2\cdot 3)^2 = 36$

~~Co oznacza, że każde trzy kolejne liczby całkowite~~

Co oznacza, że iloczyn każdych trzech liczb podniesionych do kwadratu da wielokrotność liczby 36 lub liczbę 0 lub samą liczbę 36.

To kończy dowód

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

36 / $k^6 - 2k^4 + k^2$

$k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = k^2(k^2-1)^2 = k^2(k^2-1)(k^2+1) =$

$= (k^2-1)k^2(k^2+1) = (k^2-1)k^2(k^2+1)$

są to trzy kolejne liczby całkowite dlatego na pewno jedna dzieli się przez 2, jedna na pewno dzieli się przez 3 dlatego cała liczba na pewno ~~jest podzielnikiem liczby~~ dzieli się przez 6. 36 jest wielokrotnością 6 dlatego ta liczba na pewno też dzieli się przez 36.

Zadanie 2 (4 punkty)	Standard V (ROZ)

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

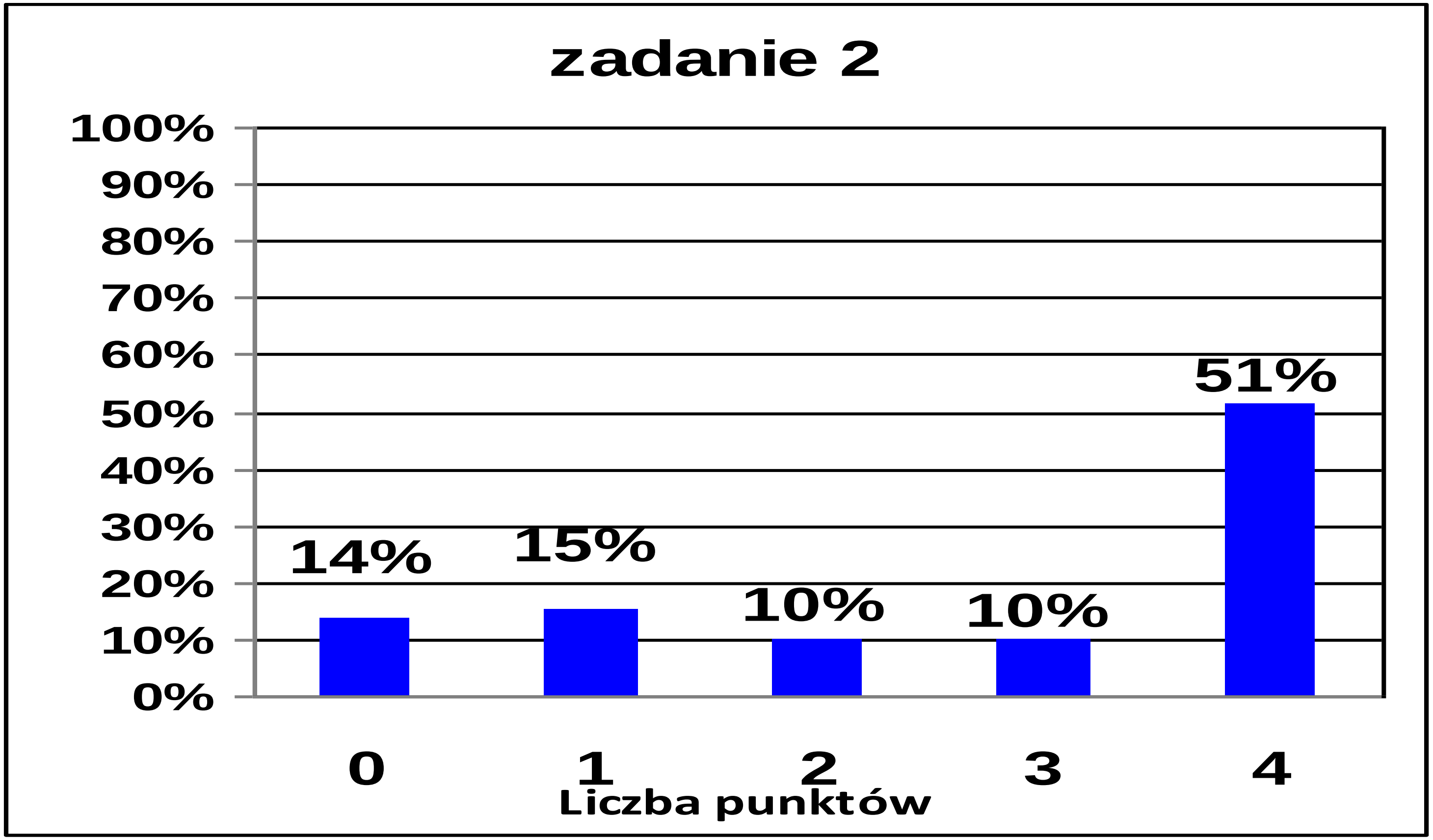
Zadanie **umiarkowanie trudne**: ł=0,67

Opuszczenia: $f_{op}=1,5\%$

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na wykonaniu działań i doprowadzeniu równości do postaci, z której łatwo można było wywnioskować tezę twierdzenia.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$$

$a+b=2c$

$a=2c-b$

$a \neq b$

$a \neq c$

$b \neq c$

$$\frac{a}{2c-b-c}+\frac{b}{b-c}=2$$

$$L=\frac{a}{c-b}+\frac{b}{b-c}=\frac{ab-ac+bc-b^2}{(c-b)(b-c)}=$$

$\cancel{ab-ac+bc-b}$

$$=\frac{a(\cancel{b-c})+b(\cancel{c-b})}{(\cancel{c-b})(\cancel{b-c})}=a+b$$

$2c=2 \,/ :2$

$c=1$

Skoro $a+b=2c$, a $c=1$ $\Rightarrow$

$L=a+b$ $\quad P=2$

$a+b=2$ z zał.

$a+b=2c$

$a+b=2\cdot 1$

$a+b=2$ $\quad L=P$

c. n. d.

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$$

$$\frac{2a(b-c)}{2(a-c)(b-c)} + \frac{2b(a-c)}{2(a-c)(b-c)} = \frac{2(a-c)(b-c)}{(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{2a(b-c)+2b(a-c)}{2(a-c)(b-c)} = \frac{4(a-c)(b-c)}{2(a-c)(b-c)}$$

$$a+b=2c \Rightarrow a=2c-b$$

$$\frac{2(2c-b)(b-c)+2b(2c-b-c)}{2(2c-b-c)(b-c)} = \frac{4(2c-b-c)(b-c)}{2(2c-b-c)(b-c)}$$

$$\frac{2(2bc-2c^2-b^2+bc)+2b(c-b)}{2\cancel{(c-b)(b-c)}} = \frac{4\cancel{(c-b)(b-c)}}{2(c-b)(b-c)}$$

$$\frac{4bc-4c^2-2b^2+2bc+2bc-2b^2}{2} = \frac{4}{2(c-b)(b-c)}$$

$$\frac{-4c^2-4b^2+8bc}{2} = \frac{4}{2(bc-c^2-b^2+bc)}$$

$$\frac{4\cancel{(-c^2-b^2+2bc)}}{2} = \frac{4}{2\cancel{(-c^2-b^2+2bc)}}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{4}{2}$$

$$2=2$$

$$L=P$$

c.n.u.

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

$a \neq b \quad a \neq c \quad b \neq c \quad a+b=2c$

$$\begin{cases} a+b=2c \Rightarrow a=2c-b \\ \frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\frac{a(b-c)}{(a-c)(b-c)} + \frac{b(a-c)}{(b-c)(a-c)} = 2$$

$$\frac{ab-ac}{ab-ac-cb+c^2} + \frac{ab-bc}{ab-ac-cb+c^2} = 2$$

$$ab-ac+ab-bc = 2ab-2ac-2bc+2c^2$$

$$\cancel{2ab}-bc-ac = \cancel{2ab}-2ac-2bc+2c^2$$

$$\boxed{-3bc-3ac=2c^2}$$

$$-3bc-3(2c-b)=2c^2$$

$$-3bc-6c+3b=2c^2$$

$$-2c^2-6c-3bc+3b=0$$

c.n.d

$$a+b=2c \quad /:c$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=2$$

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$$

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

$a+b=2c$

$a=2c-b$

$\frac{a+b}{c}=2$

$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$

$\frac{2c-b}{a-c}+\frac{2c-a}{b-c}=2$

$\frac{(2c-b)(b-c)+(2c-a)(a-c)}{(a-c)(b-c)}=2$

$\frac{2cb-2c^2-b^2+bc+2ac-2c^2-a^2+ac}{ab-ac-bc+c^2}=2$

$\frac{3bc-4c^2-b^2+3ac-a^2}{ab-ac-bc+c^2}=\frac{a+b}{c}$

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

$$a+b=2c \quad / :c$$

$$\boxed{\frac{a+b}{c}=2 \quad / \cdot (\,)^2}$$

$$\cancel{L=\frac{a+b}{c}=\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)}}$$

$$\cancel{\frac{ab-ac+ba-bc}{ab-ac-cb+c^2}=\frac{2ab-bc-ac}{ab-ac-bc+c^2}}$$

$$\cancel{L=\frac{a+b}{c}=\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2}}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2}=4$$

$$a^2+2ab+b^2=4c^2$$

$$a^2-2ab+b^2+4ab=4c^2$$

$$(a-b)^2+4ab=4c^2$$

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

zał: $a+b=2c$ $\quad a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$

teza: $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$

D-d:

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)}=2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{ab-ac+ab-bc}{ab-ac-bc+c^2}=2$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{2ab}-ac-bc=\cancel{2ab}-2ac-2bc+2c^2$$

$$\Updownarrow$$

$$ac+bc=2c^2 \quad /:c$$

$$\Updownarrow$$

$$a+b=2c$$

$\boxtimes$

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

$a \neq b \quad a+b=2c$

$a \neq c$

$b \neq c$

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$$

$$\frac{a}{a-c}=2-\frac{b}{b-c}$$

$$\frac{a}{a-c}=\frac{2b-2c-b}{b-c}=\frac{b-2c}{b-c}$$

$$(a-c)(b-2c)=a(b-c)$$

$$ab-2ac-cb+2c^2=ab-ac$$

$$ac+bc-2c^2=0$$

$$c(a+b-2c)=0$$

$$c=0 \lor a+b-2c=0$$

$$a+b=2c$$

c.n.d.

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$$

$$\frac{a(b-c)}{(a-c)(b-c)}+\frac{b(a-c)}{(a-c)(b-c)}=2$$

jeżeli $a=b$, $b=c$, $a=c$
to wyszła by liczba 0,
a $0 \neq 2$

$$\frac{ab-\cancel{ac}+ba-bc}{ab-ac-cb+c^2}=2$$

$$\frac{2ab-ac-bc}{ab-ac-cb+c^2}=2 \quad | \cdot \cancel{ab-ac-cb+c^2}$$

obiekt

$$\cancel{2ab}-ac-bc=\cancel{2ab}-2ac-2cb+2c^2 \quad | :c$$

$\cancel{a-b=-2a-2b+2c}$

$\cancel{3a+3b=2c}$

$\cancel{3ac+3bc=2c}$ $\quad$ $\cancel{a+b=2c}$

$ab+c^2=2$

$2^2: 2$

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

$a \neq b \quad a \neq c \quad b \neq c \quad a+b=2c$

$a = 2c - b$

$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$

$c = \frac{a+b}{2}$

$b = 2c - a$

$\boxed{\frac{a+b}{c} = 2}$

$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c}$

$a+b=2c$

$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$

$\frac{(a+b)(a-c)(b-c)}{c(a-c)(b-c)} = \frac{a(b-c)\cdot c}{c(a-c)(b-c)} + \frac{b(a-c)\cdot c}{c(a-c)(b-c)}$

$(a^2 - ac + ab - bc)(b-c) = abc - ac^2 + abc - bc^2$

$a^2b - a^2c - abc + ac^2 + ab^2 - abc - b^2c + bc^2 =$

$= abc - ac^2 + abc - 1$

$\boxed{\frac{a+b}{c} = 2}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 2$

$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 2$

$\frac{a}{2c-b-c} + \frac{b}{b-c} = 2$

$\boxed{\frac{a}{c-b} + \frac{b}{b-c} = 2}$

$\frac{(a+b)(\cancel{b-c})}{(c-b)(\cancel{b-c})} = 2$

$\frac{a}{c-b} + \frac{b}{b-c} = 2$

$\frac{ab - ac + bc - b^2}{(c-b)(b-c)} = 2$

$\boxed{\frac{a(b-c) + b(b-c)}{(c-b)(b-c)} = 2}$

$\frac{a+b}{c-b} = 2$

$\frac{2c}{c-b} = 2$

$\frac{2c}{c-b} = \frac{a+b}{c}$

$2c^2 = (c-b)(a+b)$

$a+b=2c \quad |:2$

$\frac{a+b}{2}=c$

$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$

$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$

$\frac{ab-ac+ab-bc}{ab-\cancel{ac}-cb+c^2}=2$

$\frac{ab-a\frac{a+b}{2}+ab-b\frac{a+b}{2}}{ab-a\frac{a+b}{2}-b\frac{a+b}{2}+\frac{a^2+2ab+b^2}{4}}=2$

$\frac{2ab-a\frac{a+b}{2}-b\frac{a+b}{2}}{\frac{4ab}{4}+\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-a\frac{a+b}{2}-b\frac{a+b}{2}}=2$

$\frac{2ab-a\frac{a+b}{2}-b\frac{a+b}{2}}{\frac{6ab+a^2+b^2}{4}-a\frac{a+b}{2}-b\frac{a+b}{2}}=2 \quad \left|\cdot\left(\frac{6ab+a^2+b^2}{4}-a\frac{a+b}{2}-b\frac{a+b}{2}\right)\right.$

$2ab-\cancel{a\frac{a+b}{2}}-\cancel{b\frac{a+b}{2}}=\frac{6ab+a^2+b^2}{2}-\cancel{a\frac{a+b}{2}}-\cancel{b\frac{a+b}{2}}$

$2ab=\frac{6ab+a^2+b^2}{2} \quad |\cdot 2$

$4ab=6ab+a^2+b^2 \quad |-4ab$

$a^2+2ab+b^2=0$

$(a+b)^2=0$

$a+b=0$

$2c=0$

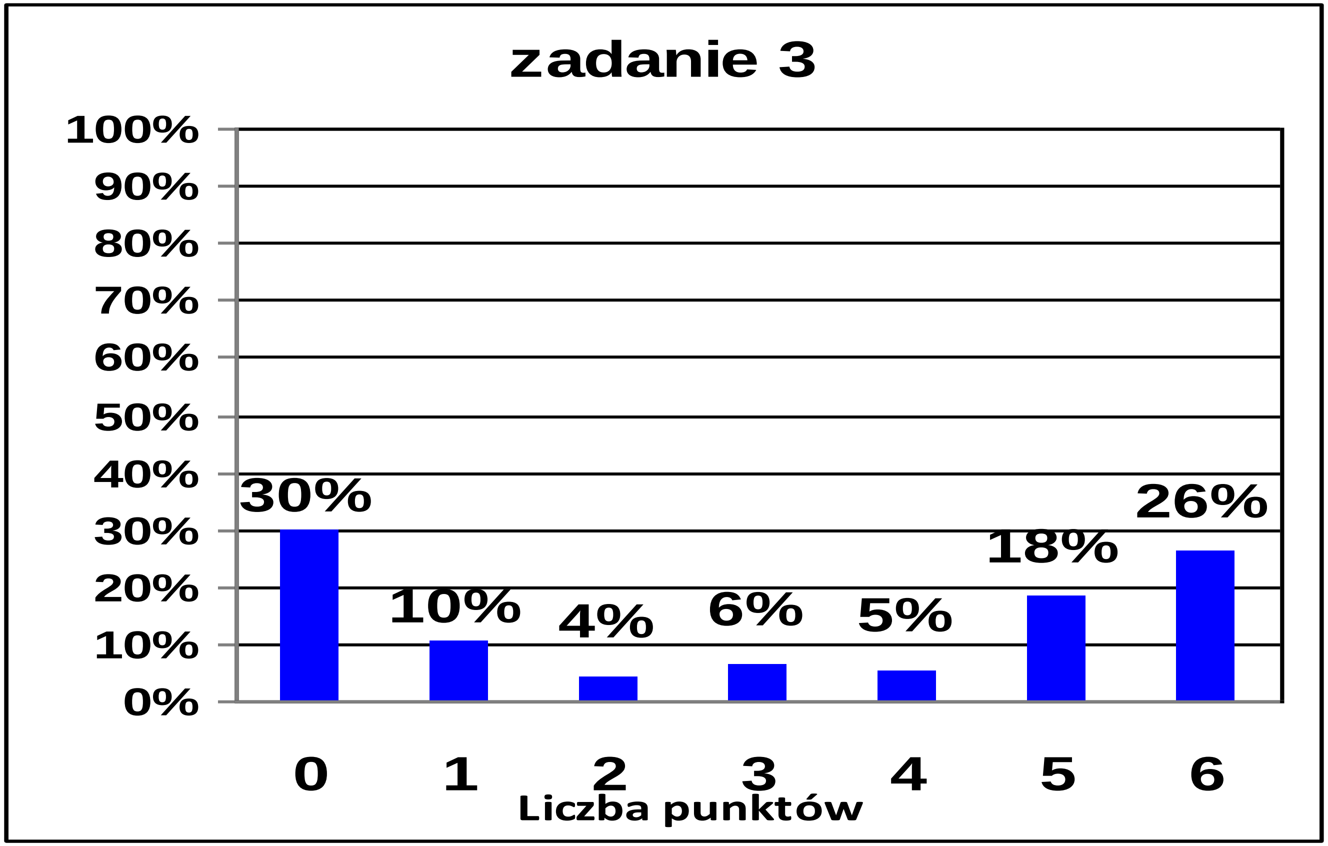
Zadanie 3. (6 punktów)	Standard IV (STR)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

Zadanie **umiarkowanie trudne**: ł=0,50
Opuszczenia: $f_{op}=3,2\%$

Schemat oceny tego zadania był odniesiony do realizacji trzech etapów rozwiązania zadania (1+4+1)

Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 3. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$

zał:
$\Delta > 0$

$\boxed{\Delta = (-4m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m^2 - m - 2)}$

$\Delta = 16m^2 - 24m^2 - 4m + 8$

$\Delta = -8m^2 - 4m + 8$

$-8m^2 - 4m + 8 > 0 \quad /:4$

$-2m^2 - m + 2 > 0$

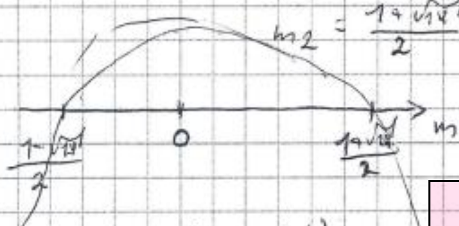
$\Delta = 1 - 4(-2) \cdot 2$

$\Delta = 17$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$

$m_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$

$m_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$



$m \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

$\boxed{\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2} - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^2 < 8(m-1)}$

$\Delta = -8m^2 - 4m + 8$

$\sqrt{\Delta}$

Zadanie 3. *(6 pkt)*
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$.

$x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$

$\Delta = 16m^2-4(m^3+6m^2+m-2)$

$\Delta = 16m^2+4m^3-24m^2-4m+8$

$\Delta = 4m^3-8m^2-4m+8$

$\Delta = m^3-2m^2-m+2$

$\Delta = m^2(m-2)-(m-2)$

$\Delta = (m-2)(m^2-1)$

$m=2 \quad \vee \quad m^2=1$
$m=1 \vee m=-1$

$x_1 = \frac{4m+\sqrt{(m-2)(m^2-1)}}{2}$

$x_2 = \frac{4m-\sqrt{(m-2)(m^2-1)}}{2}$

$(x_1-x_2)^2 < 8(m+1)$

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 < 8m+8$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$
$x_1 x_2 = -m^3+6m^2+m-2$

$\left(\frac{4m-\sqrt{(m-2)(m^2-1)}}{2}\right)^2+\left(\frac{4m+\sqrt{(m-2)(m^2-1)}}{2}\right)^2+$

$-2(-m^3+6m^2+m-2) < 8m+8$

$\frac{16m^2-8m\sqrt{(m-2)(m^2-1)}+(m-2)(m^2-1)}{4}+$

$+\frac{16m^2+8m\sqrt{(m-2)(m^2-1)}+(m-2)(m^2-1)}{4}+2m^3-12m^2-2m+4<8m+8$

$\frac{32m^2+2(m-2)(m^2-1)}{4}+2m^3-12m^2-2m+4<8(m+1)$

$32m^2+(2m-4)(m^2-1)+8m^3-48m^2-8m+16<32(m+1)$

$32m^2+2m^3-2m-4m^2+4+8m^3-48m^2-8m+16<32m+32$

$\cancel{10m^3-16m^2}\ 10m^3-14m^2-10m-32m-16<0$

$10m^3-14m^2-42m-16<0$

$5m^3-7m^2-21m-8<0$

Zadanie 3. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$

$\Delta > 0 \qquad \Delta = 16m^2 + 4(m^3 + 6m^2 + m - 2)$

$\Delta = 16m^2 + 4m^3 + 24m^2 + 4m - 8$

$\Delta = 4m^3 + 40m^2 + 4m - 8$

$\Delta = 4m(m^2 + 10m) + 4(m-2)$

$\Delta = (-4m)^2 - 4(-m^3 + 6m^2 + m - 2)$

$\Delta = 16m^2 + 4m^3 - \cancel{6m}\ 24m^2 - 4m + 8$

$\Delta = 4m^3 - 8m^2 - 4m + 8$

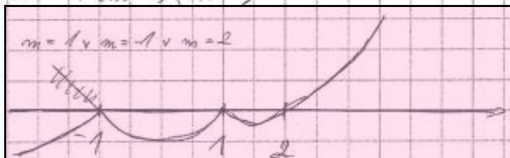
$\cancel{\Delta = 4m(m^2 - 2m) + 4(m}$

$\Delta = 4m^2(m-2) - 4(m-2)$

$\Delta = (4m^2 - 4)(m-2)$

$\Delta = 4(m^2-1)(m-2) > 0$

$m = 1 \lor m = -1 \lor m = 2$



$\Delta > 0$ dla $m \in (2, +\infty)$

$(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$

$(x_1 - x_2) < \sqrt{8(m+1)}$

$x_1 - x_2 < \sqrt{8(m+1)}$

$0 < \frac{-\sqrt{8(m+1)}}{(x_1+x_2)} \quad / \cdot (-1)$

$0 > \frac{\sqrt{8(m+1)}}{x_1+x_2}$

$0 > \frac{8(m+1)}{(x_1+x_2)^2}$

$0 > \frac{8(m+1)}{\left(\frac{4m}{1}\right)^2}$

$0 > \frac{8(m+1)}{16m^2}$

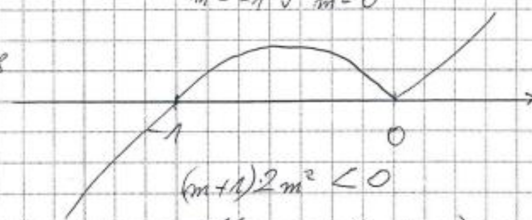
$\cancel{-8(5m^2+1)}$

$\cancel{4m^3 + 4m = 4m(m^2+1)}$

$0 > \cancel{8m+8}\ \frac{m+1}{2m^2}$

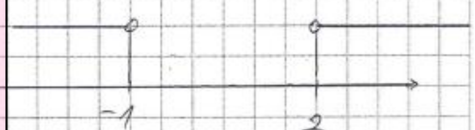
$0 > (m+1)(2m^2)$

$m = -1 \lor m = 0$



$(m+1) \cdot 2m^2 < 0$

dla $m \in (-\infty, -1)$



Odpowiedź: Nie ma takiego m.

$y=ax^2+bx+c$

Zadanie 3. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$.

Zał:

$\Delta > 0$

$\Delta = (4m)^2 - 4\cdot(-m^3+6m^2+m-2)$

$\Delta = 16m^2 - (-4m^3+24m^2+4m-8)$

$\Delta = 16m^2+4m^3-24m^2-4m+8$

$\Delta = 4m^3-8m^2-4m+8$

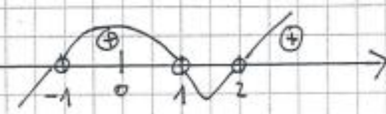
$\downarrow$

$4m^2(m-2)-4(m-2)$

$(m-2)(4m^2-4) = (m-2)(2m-2)(2m+2)$

$m=2$ $\quad$ $2m=2 \mid :2$, $m=1$ $\quad$ $2m=-2 \mid :2$, $m=-1$

1°



$\Delta > 0$

$\downarrow$

$m \in (-1,1)(2,\infty)$

$m=2$

$x^2-4\cdot 2x-2^3+6\cdot 2^2+2-2=0$ $\qquad$ $-8+24+2-2$

$x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$

$\downarrow$

$x=4$

$\uparrow$

podwójny

$(x_1-x_2)^2 < 8(m+1)$

$(4-4)^2 < 8(2+1)$

$0 < 16+8$

$0 < 24$

Zadanie 3. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

$\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$

~~$\Delta > 0$ żeby istniały dwa pierwiastki rzeczywiste~~

~~$(x_1 - x_{11})^2 < 8(m+1)$~~

2,828427124746

dla $m = 0$

$4m - m^3 + 6m$

$x^2 = 2$

$x_1 = \sqrt{2} \quad \vee \quad x_{11} = -\sqrt{2}$

$\begin{cases} x_1 \neq x_{11} \\ (x_1 - x_{11})^2 < 8(m+1) \end{cases}$

$(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 < 8$

gdy $m \neq 0$ to $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$

$\begin{cases} \Delta > 0 \quad \text{żeby istniały dwa pierwiastki rzeczywiste} \\ (x_1 - x_{11})^2 < 8(m+1) \end{cases}$

$\Delta = (4m - m^3 + 6m^2)^2 - (m-2) \cdot 4 =$
$= 16m^2 - 4m^4 + 24m^3 - 4m^3 + m^6 - 6m^5 + 24m^5 - 6m^5 + 36m^4 -$
$- 4m + 8 = m^6 - 12m^5 + 32m^4 + 44m^3 + 16m^2 - 4m + 8 = 0$

$(x_1 - x_{11})^2 = x_1^2 + x_{11}^2 - 2x_1 x_{11} = \cancel{\quad}$

$= (x_1 - x_{11})(x_1 + x_{11}) - 2x_1 x_{11}$

Zadanie 3. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

$\Delta > 0$

$m \neq 0$

$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$

$\Delta = 16m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^3 + 6m^2 + m - 2) =$

$= 16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8 > 0$

$4m^3 - 8m^2 - 4m + 8 > 0 \quad / :4$

$m^3 - 2m^2 - m + 2 > 0$

$m^2(m-2) - (m-2) > 0$

$(m-2)(m^2-1) > 0$

$(m-2)(m+1)(m-1) > 0$

$m = 2 \qquad m = -1 \qquad m = 1$

$m \in (-1; 1) \cup (2; +\infty) / \{0\}$

$(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$

$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 < 8(m+1)$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m^3 + 6m^2 + m - 2}{-4m} = \frac{m^3 - 6m^2 - m + 2}{4m} =$

Zadanie 3. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$.

$x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$

$\begin{cases} \Delta>0 \\ (x_1-x_2)^2<8(m+1) \end{cases}$

$\Delta=(-4m)^2-4(-m^3+6m^2+m-2)=$

$=16m^2+4m^3-24m^2-4m+8=$

$=4m^3-8m^2-4m+8=$

$\cancel{4m^2(m-2)-4(m+4)}$

$=4m^2(m-2)-4(m-2)$

$(4m^2-4)(m-2)>0$

$4m^2-4>0 \quad \cap \quad m-2>0$

$4m^2>4 \qquad m>0$

$m^2>1$

$m>1 \lor m<-1 \qquad m>0$

$m\in(-1;0)\cup(1;\infty)$

$(x_1-x_2)^2<8(m+1)$

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2<8m+8$

$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2<8m+8$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2x_1x_2<8m+8$

$\left(\frac{4m}{1}\right)^2-4(-m^3+6m^2+m-2)<8m+8$

$16m^2+4m^3-24m^2-4m+8-8m-8<0$

$4m^3-8m^2-12m<0$

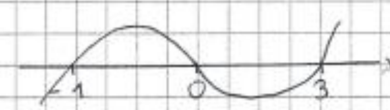
$4m(m^2-2m-3)<0$

$m<0 \qquad \Delta=4+12=16$

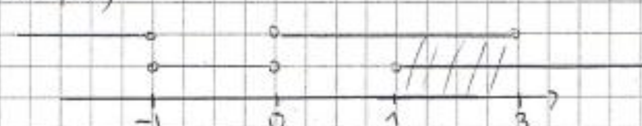
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$

$m_1=\frac{2-4}{2}=-1$

$m_2=3$



$m\in(-\infty;-1)\cup(0;3)$



Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma 2 różne pierwiastki $\Leftrightarrow \Delta > 0$

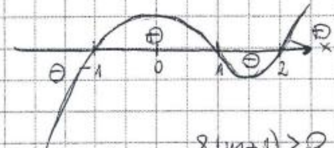
~~$x^2 - 4mx - m$~~

$\Delta = 16m^2 - 4\cdot(-m^3 + 6m^2 + m - 2) = 16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8$

$\Delta = 4m^3 - 8m^2 - 4m + 8 = 4m^3 - 4m - 8m^2 + 8 = 4m(m^2-1) - 8(m^2-1) = (m^2-1)(4m-8)$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m^2-1)(4m-8) > 0$

$(m^2-1)(4m-8) > 0 \Leftrightarrow m < -1 \vee m \in (1,2)$



$(x_1 - x_2)^2$ jest > 0

$D: m \in (-\infty, -1) \cup (1,2)$

$8(m+1) > 0 \Rightarrow 8m + 8 > 0 \quad 8m > -8 \quad m > -1$

$D: m \in (1,2)$

$(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$

$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 < 8(m+1)$

$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 < 8(m+1) \quad | + 2x_1x_2$

$\boxed{(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 < (8(m+1)) + 2x_1x_2$

$(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 < (8(m+1)) + 2x_1x_2 \quad | + 2x_1x_2$

$(x_1+x_2)^2 < (8(m+1)) + 2x_1x_2 + 2x_1x_2$

$(x_1+x_2)^2 < (8(m+1)) + 4x_1x_2$

$\left(\frac{4m}{1}\right)^2 < (8(m+1)) + 4\left(\frac{m^3 + 6m^2 + m - 2}{1}\right)$

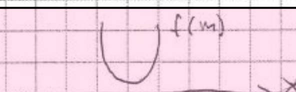
$16m^2 < 8m + \cancel{8} + 4m^3 + 24m^2 + 4m - \cancel{8} \quad | - 16m^2$

$0 < 4m^3 + 24m^2 - 16m^2 + 8m + 4m$

$a > 0$

$4m^3 + 8m^2 + 12m > 0$

nie ma pierw. R. $\Leftarrow \Delta = 64 - 192 = -128$ $\Rightarrow$



$f(m)$

$f(m) = 4m^3 + 8m^2 + 12m$

Odp: ~~Nierówność $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ zachodzi dla każdego m w równaniu $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$, jednak, żeby istniały dwa pierwiastki tego równania $m \in$~~

$\underbrace{m \in R \wedge m \in (1,2)}$

Odp: $m \in (1,2)$

Zadanie 3. *(6 pkt)*

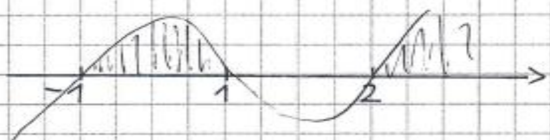
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

$a = 1 \quad b = -4m \quad c = -m^3 + 6m^2 + m - 2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 < 8(m+1) \end{cases}$$

Δ

$$(-4m)^2 - 4\cdot(-m^3 + 6m^2 + m - 2) > 0$$
$$16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8 > 0 \quad /:4$$
$$4m^2 + m^3 - 6m^2 - m + 2 > 0$$
$$m^3 - 2m^2 - m + 2 > 0$$
$$m^2(m-2) - (m-2) > 0$$
$$(m-2)(m^2-1) > 0$$
$$m = 2 \quad m = -1 \quad m = 1$$



$$m \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad /()^2$$
$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$
$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 0$$
$$\boxed{\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\cdot\frac{c}{a}\right)^2 < 8(m+1)}$$

$$(16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8)^2 < 8(m+1)$$
$$(m-2)^2(m^2-1)^2 - 8(m+1) < 0$$
$$(m^2 - 4m + 4)(m^4 - 2m^2 + 1) - 8m - 8 < 0$$
$$m^6 - 2m^4 + m^2 - 4m^5 + 8m^3 - 4m + 4m^4 - 8m^2 + 4 - 8m - 8 < 0$$
$$m^6 - 4m^5 + 2m^4 + 8m^3 - 7m^2 - 12m - 4 < 0$$

Zadanie 3. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ $\quad \Delta > 0$

$\Delta = 16m^2 - 4(-m^3 + 6m^2 + m - 2) > 0$

$\Delta = 16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8 > 0$

$\Delta = 4m^3 - 8m^2 - 4m + 8 > 0$

$m^3 - 2m^2 - m + 2 > 0$

$m^2(m-2) - 1(m-2) = (m^2-1)(m-2) = (m-1)(m+1)(m-2) > 0$

$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 =$

$(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2$

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{4m}{1} = 4m$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^3 + 6m^2 + m - 2$

$m \neq 1$

$m \neq -1$

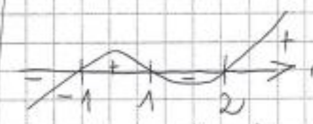
$m \neq 2$

$(4m)^2 - 4(-m^3 + 6m^2 + m - 2) < 8(m+1)$

$16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8 < 8(m+1)$

$m^2(m-2) - 1(m-2) < 8(m+1)$

$(m-1)\cancel{(m+1)}(m-2) < 8\cancel{(m+1)}$



$m \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$

$(m-1)(m-2) < 8$

$m^2 - 3m + 2 - 8 < 0$

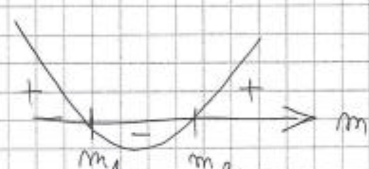
$m^2 - 3m - 6 < 0$

$\Delta_m = 9 + 24 = 33$

$\sqrt{\Delta_m} = \sqrt{33}$

$m_1 = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$

$m_2 = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$



$m \in \left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}, \frac{3+\sqrt{33}}{2} \right)$

$m \in (-1, 1) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)$

~~$m^3 + 10m^2 + m - 2$~~

~~$m^3 + m + 10m^2 + 2$~~

~~$m^3 - 2m^2 - m + 2$~~

~~$m^2(m-2) - 1(m-2)$~~

~~$(m^2-1)(m-2)$~~

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4. (4 punkty)	Standard IV (STR)

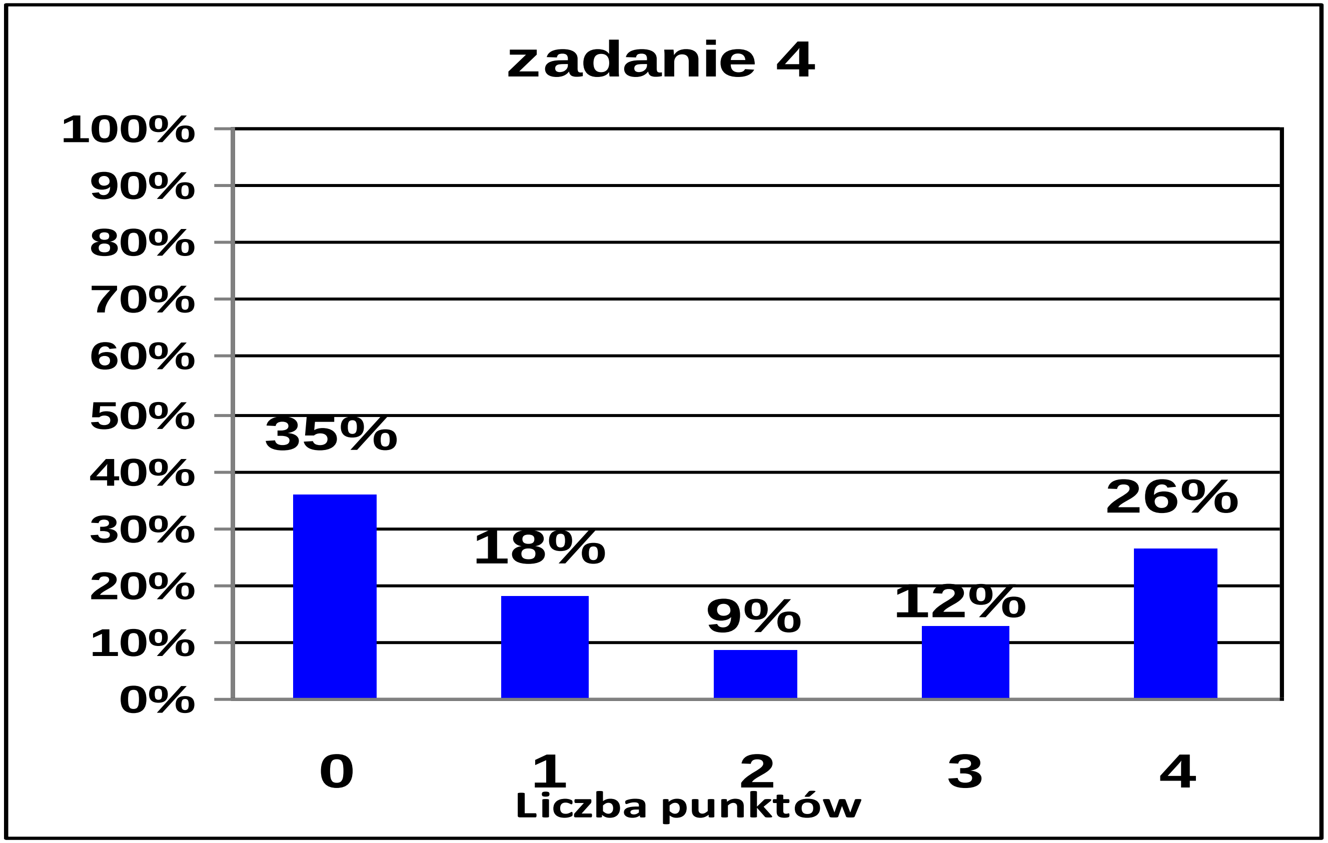
Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie **trudne**: ł=0,43
Opuszczenia: $f_{op}=3,2\%$

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na rozwiązaniu jednego z otrzymanych (z postaci alternatywy) równań trygonometrycznych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1-\cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

$x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

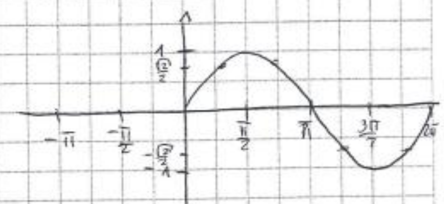
$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$

~~$2(1-\cos^2 x) - 2(1-\cos^2 x)\cos x - 1 + \cos x = 0$~~

~~$2 - 2\cos^2 x - (2 + 2\cos^2 x)\cos x - 1 + \cos x = 0$~~

$2\sin^2 x(1-\cos x) = 1 - \cos x$

$2\sin^2 x = \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$



$2\sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \lor \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} \lor x = \frac{3\pi}{4}$ $\quad x = \frac{5\pi}{4} \lor x = \frac{7\pi}{4}$

Odpowiedź: $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x \qquad \langle 0, 2\pi \rangle$

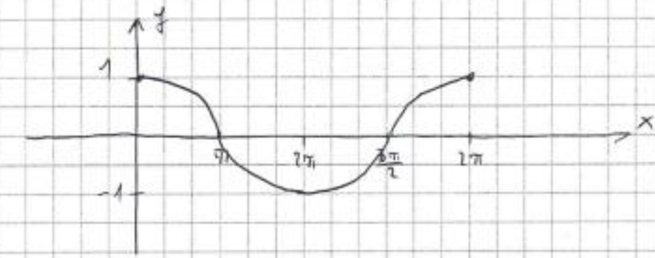
$2\sin^2 x - 1 = \cancel{\cos} x + 2\sin^2 x \cos x - \cos x$

$2\sin^2 x - 1 = \cos x (2\sin^2 x - 1)$

~~ponieważ $2\sin^2 x - 1$ jest większe~~

$\cos x = 1$

to $x = 0 \quad \vee \quad x = 2\pi$



Odpowiedź: $x = 0 \quad \vee \quad x = 2\pi$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x - 1 + \cos x = 0$

$2(1-\cos^2 x) - 2(1-\cos^2 x)\cos x - 1 + \cos x = 0$

$2 - 2\cos^2 x - 2(\cos x - \cos^3 x) - 1 + \cos x = 0$

$2 - 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x - 1 + \cos x = 0$

$2\cos^3 x + 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x(\cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0$

$(\cos x + 1)(2\cos^2 x - 1) = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\cos x = -1 \qquad 2\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$x_1 = -\pi$

$x_1 = \pi$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\pi}{4} \qquad \cos x = -\frac{\pi}{4}$

Odpowiedź: Odp $x \in \{-\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{\pi}{4}\}$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$

$2(1-\cos^2 x) - 2(1-\cos^2 x)\cos x = 1 - \cos x$

$\cancel{2} - 2\cos^2 x - \cancel{2} + 2\cos^3 x = 1 - \cos x$

$2\cos^3 x - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x = t \quad , t \in \langle -1, 1 \rangle$

$2t^3 - 2t^2 + t - 1 = 0$

	2	-2	1	-1
1		2	0	1
	2	0	1	0

$(2t^2+1)(t-1) = 0$

$2t^2 + 1 = 0 \qquad t - 1 = 0$

$2t^2 = -1 \qquad t = 1 \qquad \cos x = 1$

$t^2 \neq -\frac{1}{2}$

sprzeczne $\qquad x = 0 \quad \vee \quad x = 2\pi$

Odpowiedź: $x \in \{0, 2\pi\}$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$2(1-\cos^2 x) - 2(1-\cos^2 x)\cos x = 1 - \cos x$$

$$2 - 2\cos^2 x - ((2 - 2\cos^2 x)\cos x) = 1 - \cos x$$

$$2 - 2\cos^2 x - (2\cos x - 2\cos^3 x) - 1 + \cos x = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x - 1 + \cos x = 0$$

$$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = t \; ; \quad t \in \langle -1; 1 \rangle$$

$$2t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0$$

$t_1 = 1 \quad t_2 \notin \langle -1;1 \rangle \quad t_3 \notin \langle -1;1 \rangle$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \lor x = 2\pi$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$

z jedynki tryg: $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$2\sin^2 x - 2\sin^2 x\sqrt{1-\sin^2 x} = 1 - \sqrt{1-\sin^2 x}$

Niech: ~~sin2x~~ $\sin^2 x = a$

$2a - 2a\sqrt{1-a} = 1 - \sqrt{1-a}$

$2a - 1 = 2a\sqrt{1-a} - \sqrt{1-a}$

$2a-1 = \sqrt{1-a}\,(2a-1) \quad / : (2a-1)$

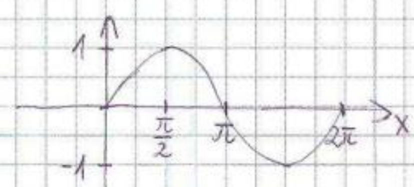
$1 = \sqrt{1-a} \quad /^2$

$1 - a = 1$

$a = 0$

$\sin^2 x = 0$

$\sin x = 0$



W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ ~~...~~ $\sin x = 0 \iff x = 0 \vee x = \pi \vee$

$\vee\ x = 2\pi$

Odpowiedź: $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 1 - \cos x$$

$$2\sin^2 x(1-\cos x) = 1 - \cos x$$

$$2\sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = 0$$

$$x = k\pi,\ k \in C$$

$$2(1-\cos^2 x)(1-\cos x) = 1 - \cos x$$

$$(2 - 2\cos^2 x)(1-\cos x) = 1 - \cos x$$

$$2 - 2\cos x - 2\cos^2 x + 2\cos^3 x = 1 - \cos x$$

$$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$\cos x = t \qquad t \in \langle -1, 1 \rangle$

$$2t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0$$

$\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{6}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$

$\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{4\sqrt{3}}{8} - \frac{3}{2} + 1$

$-\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2}$

$t = 1$

	2	−2	−1	+1
1		2	0	−1
	2	0	−1	=

$$t^2 - 1 = 0$$

$$t = -1 \lor t = 1$$

$$\cos x = -1 \lor \cos x = 1$$

$$x = k\pi,\ k \in C$$

$x = k\pi$

$\land\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle \Rightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

Odpowiedź: $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\boxed{\sin x > 0}$

$\cos x \neq 0$

$L = 2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$L = \boxed{\sin^2 x(1-\cos^2 x)} - 2\sin^2 x\cos x =$

$= \sin^2 x - \sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos x =$

$= \sin^2 x(1 - \cos^2 x + \cos x)$

$\cancel{(1-\cos x)^2 = 1 - 2\cos x + \cos^2 x}$

$L = \boxed{(1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x)} - 2(1-\cos^2 x)\cos x =$

$= (1-\cos x)(1+\cos x)(1-\cos x)(1+\cos x) - 2(1+\cos x)(1-\cos x)\cos x$

$L = (1-\cos x)^2(1+\cos x)^2 - 2(1+\cos x)(1-\cos x) = 1 - \cos x \quad /:(1-\cos x)$

$(1-\cos x)(1+\cos x)^2 - 2(1+\cos x) = 1$

$\cancel{(1+\cos x)(1+\cos}$

$(1+\cos x)\ \cancel{(1+\cos x)}(1-\cos x) - 2 = 1$

$(1+\cos x)\ [(1-\cos x)(1+\cos x) - 2] = 1$

Odpowiedź: ....

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ $\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$2\sin^2 x(1 - \cos x) - 1 + \cos x = 0$ $\qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$2\sin^2 x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$

$\cancel{(2\sin^2 x - 1)(1 - \cos x) = 0}$

$(2 - 2\cos^2 x)(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$ $\qquad \cos x = t$

$-1 \le \cos x \le 1$

$(2 - 2t^2)(1 - t) - (1 - t) = 0$

$2 - 2t - 2t^2 + 2t^3 - 1 + t = 0$ $\qquad 2t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0$

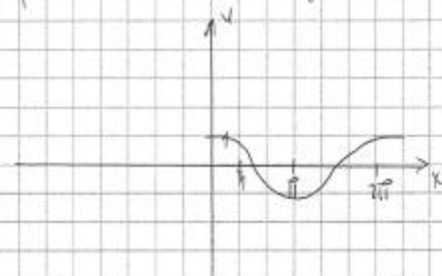
$\cancel{2t^2(2t-2)}$ $\quad 2t^2(t - 1) - (t - 1) = 0$

$(2t^2 - 1)(t - 1) = 0$

$(\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1)(t - 1) = 0$

$\sqrt{2}t = 1$

$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad t_3 = 1$



$\cancel{\sin}$ $\cos x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} = x_1$ $\qquad \cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq -\frac{\pi}{4}$ spr.

$\cos x_3 = 1 = 0 = x_2$ $\qquad x_3 = \frac{5\pi}{4}$ $\qquad x_4 = 2\pi$

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4} \vee x = 0 \vee x = 2\pi$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

$D: x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$2(1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 1 - \cos x$

$2 - 2\cos^2 x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 1 - \cos x$

$2 - 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x - 1 + \cos x = 0$

$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x(\cos x - 1) - 1(\cos x - 1) = 0$

~~$2\cos^2 x\,\emptyset$~~

$(2\cos^2 x - 1)(\cos x - 1) = 0$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = 1$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$

$\vee \qquad\qquad \vee$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in C$

$x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$

$\cos x = 1$

$\vee \quad x = \frac{\pi}{2}$

Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 1 - \cos x$

$\cancel{2\sin^2 x -}$

$\cancel{2(1-\cos^2 x) - \ldots \cdot 2}$

$2(1-\cos^2 x) - 2(1-\cos^2 x)\cdot \cos x = 1 - \cos x$

$2 - 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 1 - \cos x$

$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

$\cos x = t$

$t \in \langle -1, 1 \rangle$

$2t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0 \quad /: (t-1)$

$$\begin{array}{l} 2t^2 - 1 \\ (2t^3 - 2t^2 - t + 1) : (t-1) \\ -(2t^3 - 2t^2) \\ \quad = \quad = \quad -t + 1 \\ \qquad\qquad -(-t+1) \\ \qquad\qquad = \end{array}$$

$2t^2 - 1 = 0$

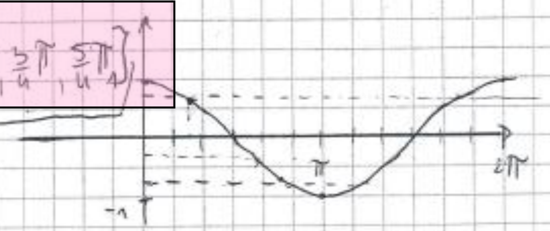
$2t^2 = 1$

$t^2 = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right\}$



$2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\pi - \frac{\pi}{4}$

$\pi + \frac{\pi}{4}$

Odpowiedź: ....

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 5. (4 punkty)	Standard IV (STR)

O ciągu (x_n) dla $n \geq 1$ wiadomo, że:

a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$.

b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 145$.

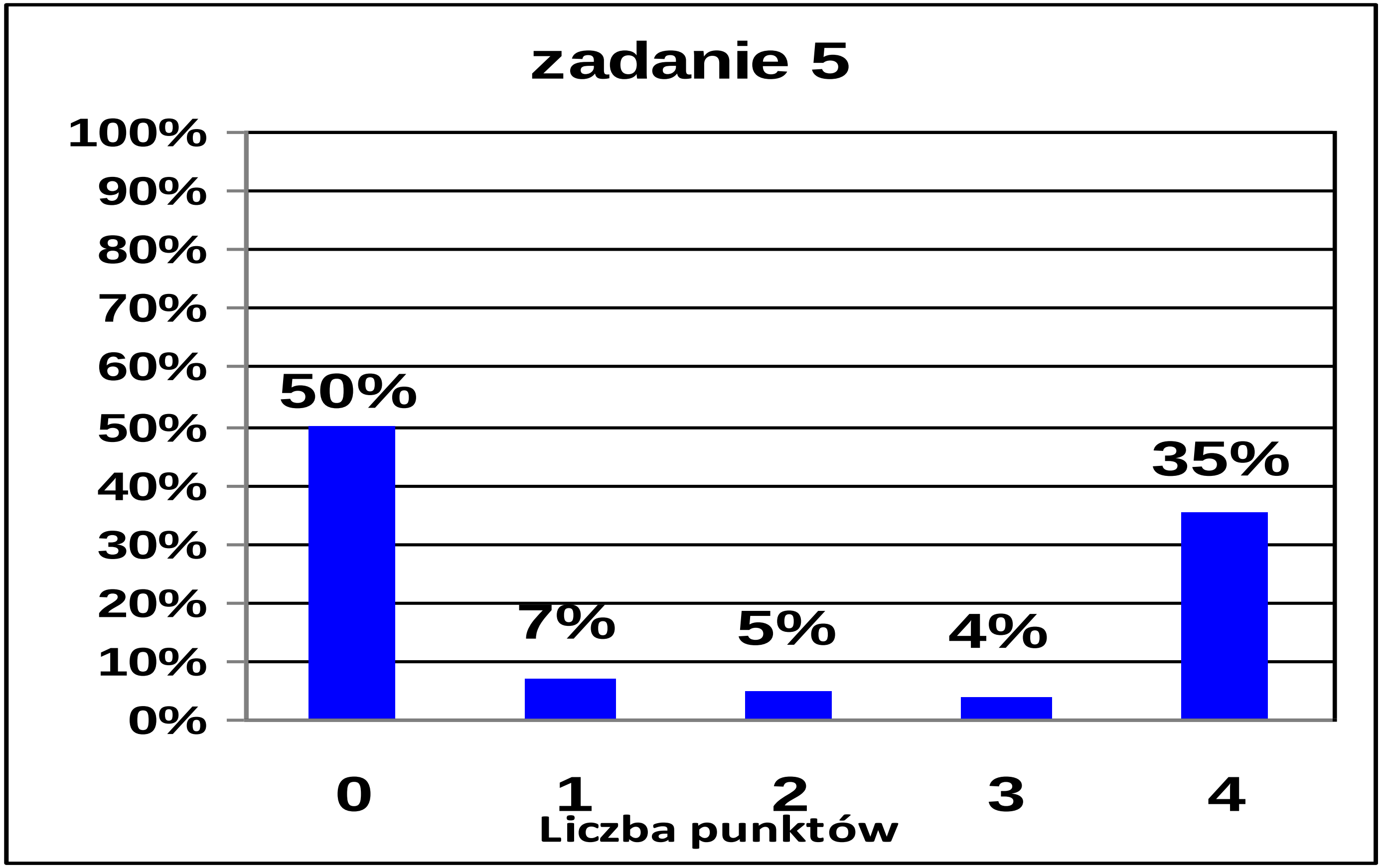
Oblicz x_1.

Zadanie **trudne**: ł=0,41
Opuszczenia: $f_{op}=4\%$

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na zapisaniu odpowiedniego równania (układu równań).

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 5. *(4 pkt)*

O ciągu (x_n) dla $n \geq 1$ wiadomo, że:

a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$.

b) $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 145$.

Oblicz x_1.

a) $a_n = 3^{x_n}$ $q=27$

$\cancel{S(x)} = S_{10} = 145$

$\frac{3^{x_{n+1}}}{3^{x_n}} = 27$ $\frac{3^{x_{n+1}}}{3^{x_n}} = 3^3$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 3$ $q\ Q = 3$

$S_n = \cancel{a}_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$145 = \cancel{a}_1 \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3}$

$145 = \cancel{a}_1 \cdot 1-$

$145 = \cancel{a}_1 \cdot \frac{-59048}{-2}$

$\cancel{a}_1 = \frac{145}{29524}$

$\cancel{a}_1 \approx 0{,}005$

$$a_n = 3^{x_n} = a_1 \cdot 27$$

$$3^{x_n} = a_1 \cdot 3^3$$

$$\frac{x_1 + x_{10}}{2} = 145$$

$$10 \cdot \frac{3^{x_1} + 3^{x_{10}}}{2} = 145$$

$$10 \cdot \frac{3^{x_1} + 3^{x_1 \cdot 27^9}}{2} = 145$$

$$10 \cdot \frac{3^{x_1} + 3^{x_1} \cdot 3^{27^9}}{2} = 145$$

$$\cancel{3^{x_1} + 3^{x_1} \cdot 3^{243} = 290}$$

$$\cancel{3^{x_1}(1 + 3^{243}) = 290}$$

$$\cancel{3^{x_1} = \frac{290}{1 + 3^{243}}}$$

$$3^{x_1}(1 + 3^{243}) = 29$$

$$3^{x_1} = \frac{29}{1 + 3^{243}}$$

$a_n = 3^{x_n}$

$\cancel{a_1 = 3^{x_1} \quad a_2 = 3^{x_2} \quad \frac{3^{x_2}}{3^{x_1}} = 27}$

$\cancel{x_2 - x_1 = 27}$

$$\frac{3^{x_{n+1}}}{3^{x_n}} = 27$$

$$\boxed{x_{n+1} - x_n = 27}$$

ciąg x_n jest ciągiem arytmetycznym

o różnicy $r = 27$

$$S_{10} = \frac{2x_1 + 9 \cdot 27}{2} \cdot 10 = 145$$

$$(2x_1 + 243) \cdot 5 = 145$$

$$2x_1 + 243 = \cancel{145}\ 29$$

$$\cancel{2x_1 = -98} \quad 2x_1 = -214$$

$$\cancel{x_1 = -49} \quad x_1 = -107$$

odp. $x_1 = -107$

$$\cancel{a_n = 3^{x_n}}$$

$$\cancel{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

$$q = 27$$

$$\cancel{S_{10} = \frac{1-q^{10}}{1-q}}$$

$$\cancel{145 = \frac{1-27^{10}}{1-27}}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 3^{x_n}$$

$$a_1 = 3^{x_1}$$

$$a_2 = 3^{x_2}$$

$$a_3 = 3^{x_3}$$

$$3^{x_1} + 3^{x_2} + 3^{x_3} + \ldots 3^{x_{10}} = 145 \qquad 3^{(x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots x_{10})} = 145$$

$$S_{10} = 3^{x_1} \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q}$$

$$145 = 3^{x_1} \cdot \frac{1-27^{10}}{1-27}$$

$$\cancel{145 = 3^{x_1} \cdot \frac{1-(3^3)^{10}}{1-3^3}}$$

$$145 = 3^{x_1} \cdot \frac{1-27^{10}}{1-27}$$

$$3^{x_1} = \frac{1-27^{10}}{26 \cdot 145}$$

$$3^{x_1} = \frac{1-27^{10}}{3770}$$

$a_n = 3^{x_n}$

$q = 27$

$x_1 + x_2 + \ldots x_{10} = 145$

$x_1 + x_1 + r + x_1 + 2r \ldots + x_1 + 9r = 145$

$x_1 (1+r + 2r + 3r \ldots 9r) = 145$

$x_1 = \frac{145}{(1+r+2r+3r+\ldots+9r)}$

$x_1 = \frac{145}{1+r+9r+2r+8r+3r+7r+4r+6r+5r}$

$= \frac{145}{1+45r} = \frac{145}{135+1} = \frac{145}{136}$

$\boxed{x_1 = \frac{145}{136}}$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 27$

$\frac{3^{x_n}}{3^{x_{n-1}}} = 27 \quad 3^3$

$3^{x_n - (x_{n-1})} = 3^3$

korzystając z różnowartościowości monotoniczności funkcji wykładniczej

$x_n - x_{n-1} = 3$

a więc jest to ciąg arytmetyczny o różnicy 3

$r = 3$

$$\begin{cases} a_n = 3^{x_n} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 145 \end{cases}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = 27$$

$$\frac{3^{x_2}}{3^{x_1}} = 27$$

$$3^{x_2 - x_1} = 3^3$$

Korzystając z różnowartościowości f. wykładniczej:

$$x_2 - x_1 = 3 \Rightarrow x_2 = x_1 + 3 \Rightarrow r = 3$$

x_n – c. arytmetyczny o różnicy 3.

$$x_n = x_1 + 3(n-1)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 145$$

$$\boxed{x_1 \cdot 10 + 9r = 145}$$

$$10x_1 + 27 = 145$$

$$10x_1 = 118$$

$$x_1 = \frac{118}{10} = \frac{59}{5}$$

Zadanie 5. *(4 pkt)*

O ciągu (x_n) dla $n \geq 1$ wiadomo, że:

a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$.

b) $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 145$.

Oblicz x_1.

$a_n = 3^{x_n}$ $\quad q = 27$

$a_1 = 3^{x_1}$

$a_2 = 3^{x_1} \cdot q$

$(3^{x_1} \cdot q)^2 = 3^{x_1} \cdot 3^{x_1} \cdot q^2$

$3^{x_1^2} \cdot q^2 = 3^{x_1^2} \cdot q^2$

$S_{10} = 3^{x_1} \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = 3^{x_1} \cdot \frac{1-27^{10}}{1-27} =$

$S_{10} = \frac{x_1 + x_{10}}{2} \cdot 10$

$29 = x_1 + x_{10}$

$x_{10} = x_1 + 9r$

$29 = 2x_1 + 9r$

$2x_1 = 29 - 9r$

$x_1 = \frac{29}{2} - \frac{9}{2}r$

$x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 145$

$x_1(1 + r + 2r + 3r + 4r + 5r + 6r + 7r + 8r) = 145$

$x_1(1 + 36r) = 145$

$\left(\frac{29}{2} - \frac{9}{2}r\right)(1 + 36r) = 145$

$\frac{29}{2} + 522 - \frac{9}{2}r - 162r = 145 \quad / \cdot 2$

$29 + 1044 - 9r - 324r = 290$

$-333r = -783$

$r = \frac{783}{333}$

$x_1 = \frac{29}{2} - \frac{9}{2} \cdot \frac{783}{333} = \frac{29}{2} - \frac{783}{74} = \frac{1073}{74} - \frac{783}{74} = \frac{290}{74} = \frac{145}{37}$

$x_1 = \frac{145}{37}$

$\cancel{145 = \frac{145}{37} + 9 \cdot \frac{783}{333} = \frac{1305}{333} + \frac{7047}{333} =}$

$S = \frac{2 \cdot \frac{145}{37} + 9 \cdot \frac{783}{333}}{2} \cdot 10 = \frac{\frac{2610}{333} + \frac{7047}{333}}{2} \cdot 10 = 145$

$a_n = 3^{x_n}$ $\quad q = 27$

$a^b = c \quad \log_a c = b$

$3^{x_n} = a_n \quad \log_3 a_n = x_n$

$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 145$

$x_n = \log_3 a_1 \cdot q^{n-1}$

$x_n = \log_3 a_1 \cdot 27^{n-1}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$x_n = \log_3 a_1 + \log_3 27^{n-1}$

$x_n = \log_3 a_1 + \log_3 3^{3(n-1)}$

$S_{\cancel{10}} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$x_n = \log_3 a_1 + 3n - 3$

$S_{10} = 145$

$S_{10} = \frac{x_1 + x_{10}}{2} \cdot 10$ $\quad a_1 > 0$

$145 = \frac{x_1 + \log_3 a_1 + 3 \cdot 10 - 3}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{10}^5$ $\quad / : 5$

$27^{n-1} > 0$

$\frac{27^{n}}{27} > 0$

$29 = x_1 + \log_3 a_1 + 30 - 3$

$2 = x_1 + \log_3 a_1$

$27^n > 0$

$n \in R$

$x_1 = 2 - \log_3 a_1$

$S_{10} = 145 = \frac{x_1 + x_{10}}{2} \cdot 10$

$x_1 = 14{,}5 - 4{,}5r$

$x_n = x_1 + (n-1)r$

$290 = 10x_1 + 10x_{10}$

$29 = x_1 + x_{10}$

$29 = 2x_1 + 9r$

$x_n = 14{,}5 - 4{,}5r + nr - r$

$x_n = 14{,}5 - 5{,}5r + nr$

$x_1 = 14{,}5 - 4{,}5r$

$x_2 = 14{,}5 - 3{,}5r$

$a_1 = 3^{x_1} = a_1$

$a_2 = 3^{x_2} = a_1 \cdot 27$

$3^{x_1 \cdot 9} = 1 \cdot 9$

$$\begin{cases} 3^{14{,}5-4{,}5r} = a_1 \\ 3^{14{,}5-3{,}5r} = 27a_1 \end{cases}$$

$3^{14{,}5-4{,}5r} = \frac{3^{14{,}5-3{,}5r}}{27}$

$3^3 \cdot 3^{14{,}5-4{,}5r} = 3^{14{,}5-3{,}5r}$

$3^{17{,}5-4{,}5r} = 3^{14{,}5-3{,}5r}$

korzystając z różnowartościowości i monotoniczności f. wykł.

$17{,}5 - 4{,}5r = 14{,}5 - 3{,}5r$

$3 = r$

$29 = 2x_1 + 9 \cdot 3$

$2 = 2x_1$

$x_1 = 1$

	Nr zadania	4.	5.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 6. (4 punkty)	Standard IV (STR)

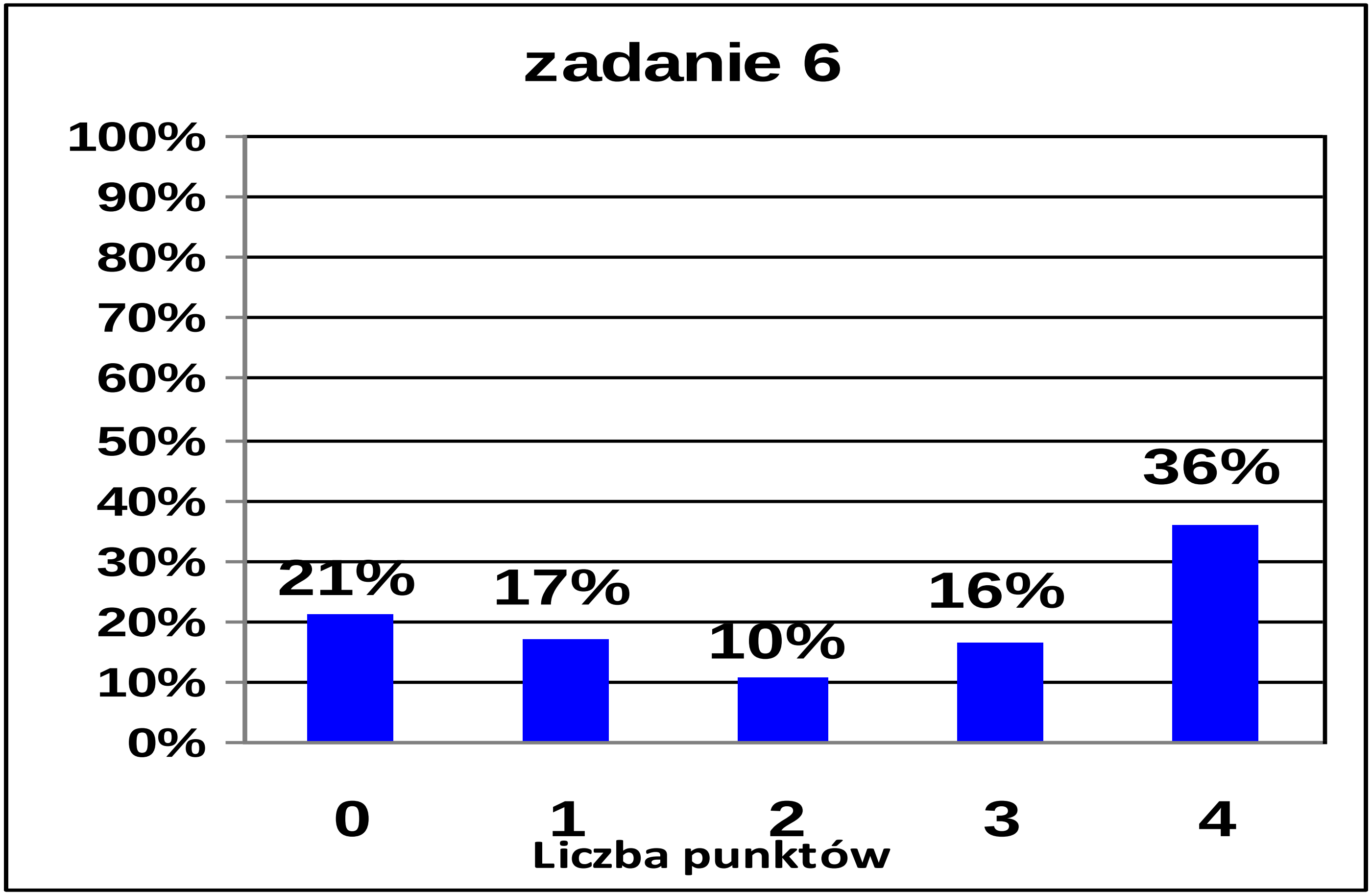
Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

Zadanie **umiarkowanie trudne**: ł=0,56

Opuszczenia: $f_{op}=0{,}4\%$

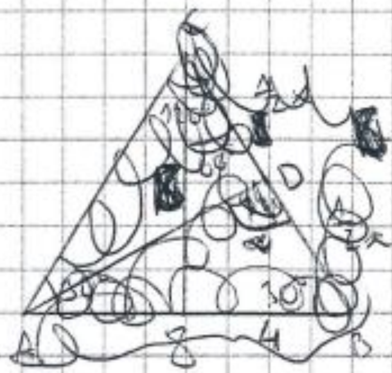
Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na zapisaniu twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD (ADC), albo na zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkąta ADF (F - rzut prostokątny punktu D na prostą AB).

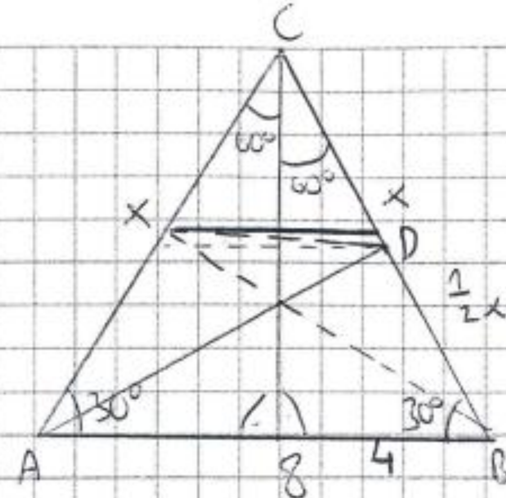
Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 6. *(4 pkt)*

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.





~~$h^2 + 4^2 = 8^2$~~

~~$h^2 = 64 - 16$~~

~~$h^2 = 48$~~

~~$h = 4\sqrt{3}$~~

$h = 8$ - zgodne z regułą o kątach $30, 60^\circ$ w trójkącie

$8^2 + 4^2 = x^2$

$x^2 = 80$

$x = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}x = 2\sqrt{5}$

$|AD| = y$

$y^2 + (2\sqrt{5})^2 = 8^2$

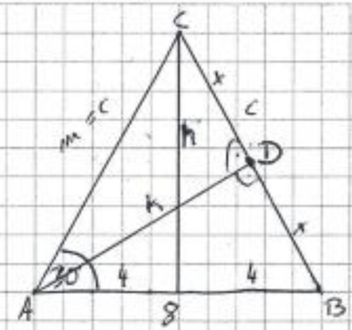
$y^2 = 84$

$y = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

Zadanie 6. *(4 pkt)*

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

$k = ?$

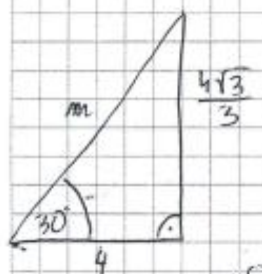


$\frac{h}{4} = tg\,30°$

$\frac{h}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$3h = 4\sqrt{3}$

$h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$



$\cancel{m = c}$ $\qquad \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{m} = \sin 30°$

$\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{m} = \frac{1}{2}$

$m = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

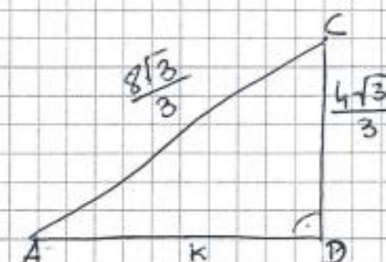
$AC = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{1}{2}c$

$x = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{2}$

$x = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$

$x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

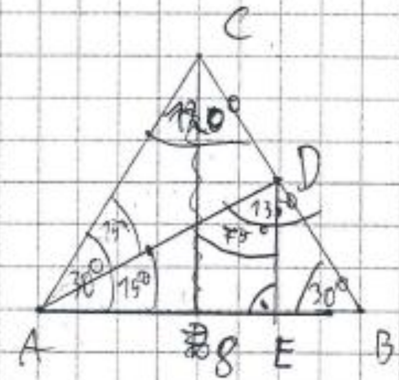


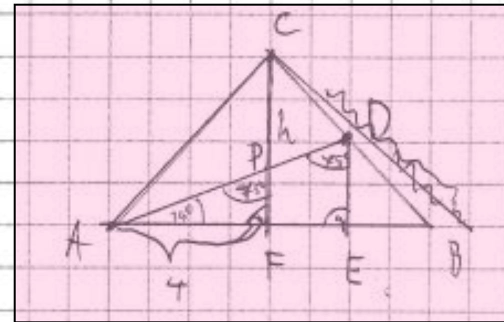
$k^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$k^2 = \frac{192}{3} - \frac{48}{3}$

$k^2 = \frac{144}{3}$

$k = \frac{12}{3} = 4$ ✓ $\qquad \underbrace{k = -\frac{12}{3}}$ sprzeczne





Trójkąty APF i △ ADE
są trójkątami podobnymi

$\frac{|AP|}{|AF|} = \frac{|AD|}{|AE|}$ $\frac{|AP|}{|PF|} = \frac{|AD|}{|DE|}$ – zgodnie z twierdzeniem Talesa

$\frac{AF}{AP} = \cos 15^\circ$

$\cos 15^\circ = \frac{|AE|}{|AD|}$

$|AP| = \frac{4}{0{,}9659} \approx 4{,}14$

$|AD| = \frac{|AE|}{\cos 15^\circ} = \frac{4+x}{\cos 15^\circ}$

$\frac{|AD|}{\sin 90^\circ} = \frac{|AE|}{\sin 75^\circ}$

$|AD| = \frac{|AE| \sin 90^\circ}{\sin 75^\circ}$

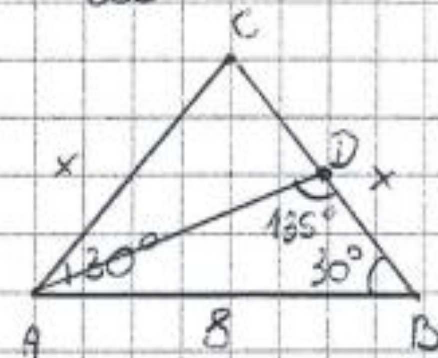
$\frac{|AE| \sin 90^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{|AE|}{\cos 15^\circ}$

Zadanie 6. *(4 pkt)*

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

$|\sphericalangle BCD| = 15^\circ$

$\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ$



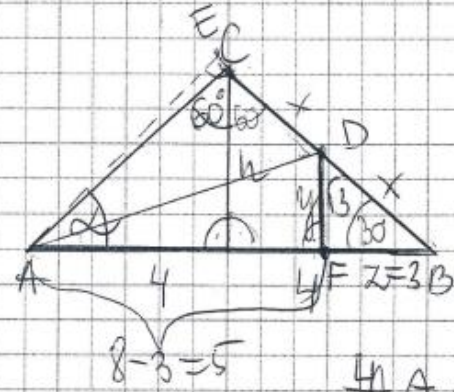
$$\frac{|AB|}{\sin 135^\circ} = \frac{|AD|}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{|AD|}{\frac{1}{2}} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{8 \cdot 2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1} = |AD|$$

$$\frac{32\sqrt{2}}{2} = |AD|$$

$$16\sqrt{2} = |AD|$$



$\alpha = 30^\circ$

$$\frac{y}{\frac{4\sqrt{3}}{2}} = \sin 30^\circ$$

$$\frac{y}{\frac{4\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$2y = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$y = \sqrt{3}$$

$$\cancel{\frac{4}{h} = ctg\, 30^\circ}$$

$$\frac{h}{4} = tg\, 30^\circ$$

$$\frac{h}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad 3h = 4\sqrt{3}, \quad \boxed{h = \frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{4}{|AC|} = \sin 60^\circ$$

$$\frac{4}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 8 = \sqrt{3}|AC|, \quad \boxed{|AC| = \frac{8\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{z} = tg\, 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{z} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\sqrt{3} = \sqrt{3}z$$

$$z = 3$$

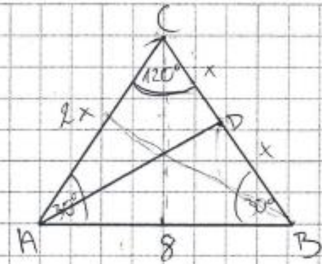
$$x = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$|AF| = 5$

$$5^2 + (\sqrt{3})^2 = |AD|^2$$

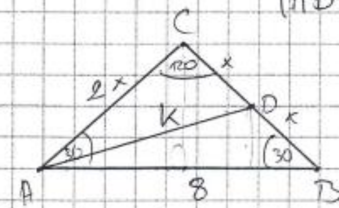
$$25 + 3 = |AD|^2$$

$$|AD| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



Rys. pomocniczy

$|AD| = k$



$D: k > 0$

$$(2x)^2 = 8^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ$$

$$4x^2 = 64 + 4x^2 - \cancel{32}^{16} x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_1}$$

$$-64 = -16\sqrt{3}\, x$$

$$x = \frac{64\sqrt{3}}{48} = \frac{32\sqrt{3}}{24} = \frac{16\sqrt{3}}{12} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$P = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{8}^4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} [j^2]$$

$$\cancel{k^2 = 64 + \frac{48}{9} - 16 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

624 $\cancel{k^2 = \frac{576 + 48}{9} - \frac{32}{3}}$

$$\cancel{k^2 = \frac{624 - 288}{9} = \frac{336}{9}}$$

$$\cancel{k = \frac{\sqrt{336}}{3} = \frac{\sqrt{21}}{3}}$$

$\cos(90^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ$

$$k^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ$$

$$k^2 = \frac{16}{3} + \frac{64}{3} = \frac{80}{3} - \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{64}^{32}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

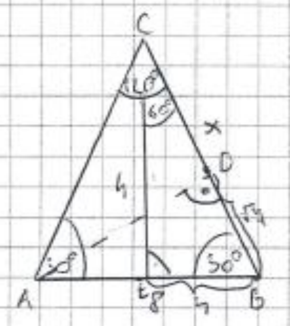
$$k^2 = \frac{48}{3}$$

$$k^2 = 16 \implies \underline{k = 4} \vee k = -4 \notin D$$

Środkowa AD ma długość 4.

Zadanie 6. *(4 pkt)*

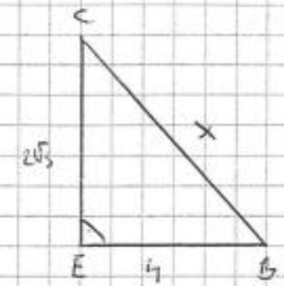
Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.



$\cos 30^\circ = \frac{h}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \quad | \cdot 4$

$2\sqrt{3} = h$



$x^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2$

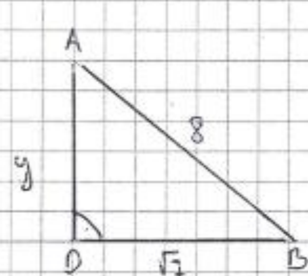
$x^2 = 16 + 4 \cdot 3$

$x^2 = 28$

$x = \sqrt{28}$

$x = 2\sqrt{7}$

$DB = \sqrt{7}$

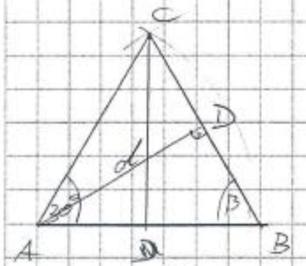


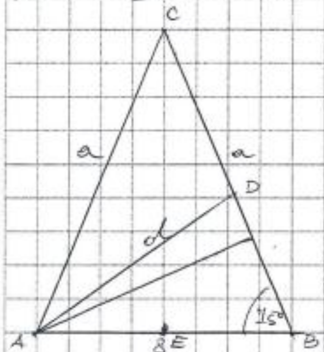
$y^2 = 8^2 - (\sqrt{7})^2$

$y^2 = 64 - 7$

$y = \sqrt{57}$

$|AD| = \sqrt{57}$

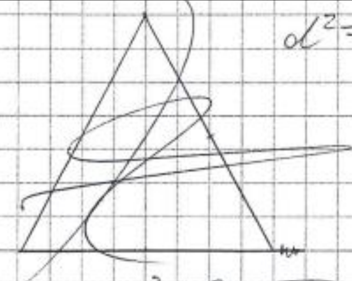




$|AB| = 8 \qquad |\sphericalangle BAC| = 30^\circ$

$|AC| = |BC|$

$\beta = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 75^\circ$



$d^2 = \frac{1}{2}a^2 + 64 - 16a \cdot \cos 75^\circ$

$\cancel{|CE|^2 = d^2 - 16} \qquad |CE|^2 = a^2 - 16$

$|CE|^2 =$

$a^2 = 64 + \cancel{a^2} - 16a \cdot \cos 30^\circ$

$0 = 64 - 8\sqrt{3}\,a$

$-64 = -8\sqrt{3}\,a$

$8 = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$d \rightarrow$ środkowa tego trójkąta

$d^2 = \frac{1}{2}a^2 + 64 - 16a \cdot \cos 75^\circ$

$\cancel{d^2 =}$

$d^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 64 - 16 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 75^\circ$

$d^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 3}{9} + 64 - \frac{128\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 75^\circ$

$d^2 = \frac{192}{18} + \frac{192}{3} - \frac{128\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 75^\circ$

$d^2 = 10\frac{2}{3} + 21\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \cos 75^\circ$

$d^2 = \frac{32}{3} + \frac{64\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}2588$

$d^2 = 10{,}(6) + 21{,}(3) \cdot \sqrt{3} \cdot 0{,}2588$

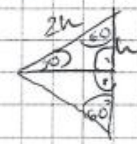
$d^2 \approx 10{,}66 + 5{,}52$

$d^2 \approx 16{,}18$

$d \approx 4{,}02$

$\alpha = 30^\circ$ $\qquad \beta = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

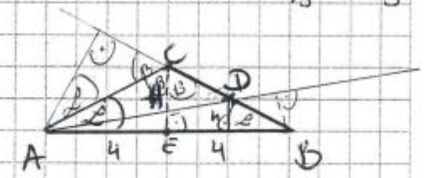
$|AB| = 8$



$\frac{4}{|CB|} = \cos\alpha$

$|CB| = \frac{4}{\cos 30^\circ}$

$|CB| = \frac{4\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$



$\frac{4}{|CB|} = \cos\alpha$

$|CB| = \frac{4}{\cos 30^\circ}$

$|CB| = \frac{4\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$H = \frac{1}{2}|CB| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ $\qquad |AD| = x$

$\frac{1}{2}H = h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$P_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot H = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

$|BD| = \frac{1}{2}|CB| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$|AD| = x$

$p = \frac{|AB| + |BD| + x}{2} = \frac{8 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + x}{2}$

$P_{ABD} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$$P_{ABD} = \sqrt{\frac{8+\frac{4\sqrt{3}}{3}+x}{2}\left(\frac{8+\frac{4\sqrt{3}}{3}+x}{2}-8\right)\left(\frac{8+\frac{4\sqrt{3}}{3}+x}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{8+\frac{4\sqrt{3}}{3}+x}{2}-x\right)}$$

$$P_{ABD} = \sqrt{\frac{\frac{24+4\sqrt{3}}{3}+x}{2}\left(\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}+x-8}{2}\right)\left(\frac{8+x-\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2}\right)\left(\frac{8+\frac{4\sqrt{3}}{3}-x}{2}\right)}$$

$$\frac{64\cdot 3}{9} = \left(\frac{24+4\sqrt{3}}{3}+x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}-24}{3}+x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{24-4\sqrt{3}}{3}+x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{24+4\sqrt{3}}{3}-x\right)$$

$$64\cdot 3 = \left(\frac{12+2\sqrt{3}}{3}+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}-12}{3}+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{12-2\sqrt{3}}{3}+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{12+2\sqrt{3}}{3}-\frac{x}{2}\right)$$

$$64\cdot 3 = \left(\frac{24+4\sqrt{3}+3x}{6}\right)\left(\frac{4\sqrt{3}-24+3x}{6}\right)\left(\frac{24-4\sqrt{3}+3x}{6}\right)\left(\frac{24+4\sqrt{3}-3x}{6}\right) \Big| \cdot 6^4$$

$$6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 64\cdot 3 = \left(24\cdot 24 - \cancel{24\cdot 4\sqrt{3}} + 24\cdot 3x + \cancel{24\cdot 4\sqrt{3}} - 16\cdot 3 + \cancel{12\sqrt{3}x} + 3\cdot 24x - \cancel{12\sqrt{3}x} + 9x^2\right)$$
$$\cdot\left(\cancel{24\cdot 4\sqrt{3}} + 16\cdot 3 - \cancel{12\sqrt{3}x} - 24\cdot 24 - \cancel{24\cdot 4\sqrt{3}} + 3\cdot 24x + 24\cdot 3x + \cancel{12\sqrt{3}x} - 9x^2\right)$$

$$36\cdot 36\cdot 64\cdot 3 = \left(24\cdot 24 + 24\cdot 3x - 16\cdot 3 + 3\cdot 24x + 9x^2\right)\left(-24\cdot 24 + 24\cdot 3x + 16\cdot 3 + 24\cdot 3x - 9x^2\right)$$

$$36\cdot 36\cdot 64\cdot 3 = \left(576 + 72x - 48 + 72x + 9x^2\right)\left(-576 + 72x + 48 + 72x - 9x^2\right)$$

$$36\cdot 36\cdot 64\cdot 3 = \left(9x^2 + \underset{48}{144}x + \underset{176}{528}\right)\left(-9x^2 + 144x - 528\right)$$

$$36\cdot 36\cdot 64\cdot 3 = 3\left(3x^2 + 48x + 176\right)\left(-3x^2 + 48x - 176\right)\cdot 3 \quad \Big| : 9$$

$$12\cdot 36\cdot 64 = \left(3x^2 + 48x + 176\right)\left(-3x^2 + 48x - 176\right)$$

$$12\cdot 36\cdot 64 = \left(-9x^4 + \cancel{48\cdot 3x^3} - 176\cdot 3x^2 - \cancel{48\cdot 3x^3} + 48\cdot 48x^2 - \cancel{176\cdot 48x} - 176\cdot 3x^2 + \cancel{176\cdot 48x} - 176\cdot 176\right)$$

$$12\cdot 36\cdot 64 = -9x^4 - 1056x^2 + 2304x^2 - 30976$$

$$-9x^4 + 1248x^2 - 3328 = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$9x^4 - 1248x^2 + 3328 = 0$$

27648

$$x^2 = t, \quad t \geq 0$$

1557504

119808

$$9t^2 - 1248t + 3328 = 0$$

1437696

$$\Delta = 1437696$$

$$\sqrt{\Delta} \approx 1199$$

$$t_1 \approx \frac{49}{18}$$

$$t_2 = \frac{2247}{18} \approx 136$$

$$x^2 = \frac{49}{18}$$

$$x = \frac{7}{3\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}65$$

$$x^2 = 136$$

$$x \approx 11{,}66$$

Zadanie 7. (4 punkty)	Standard IV (STR)

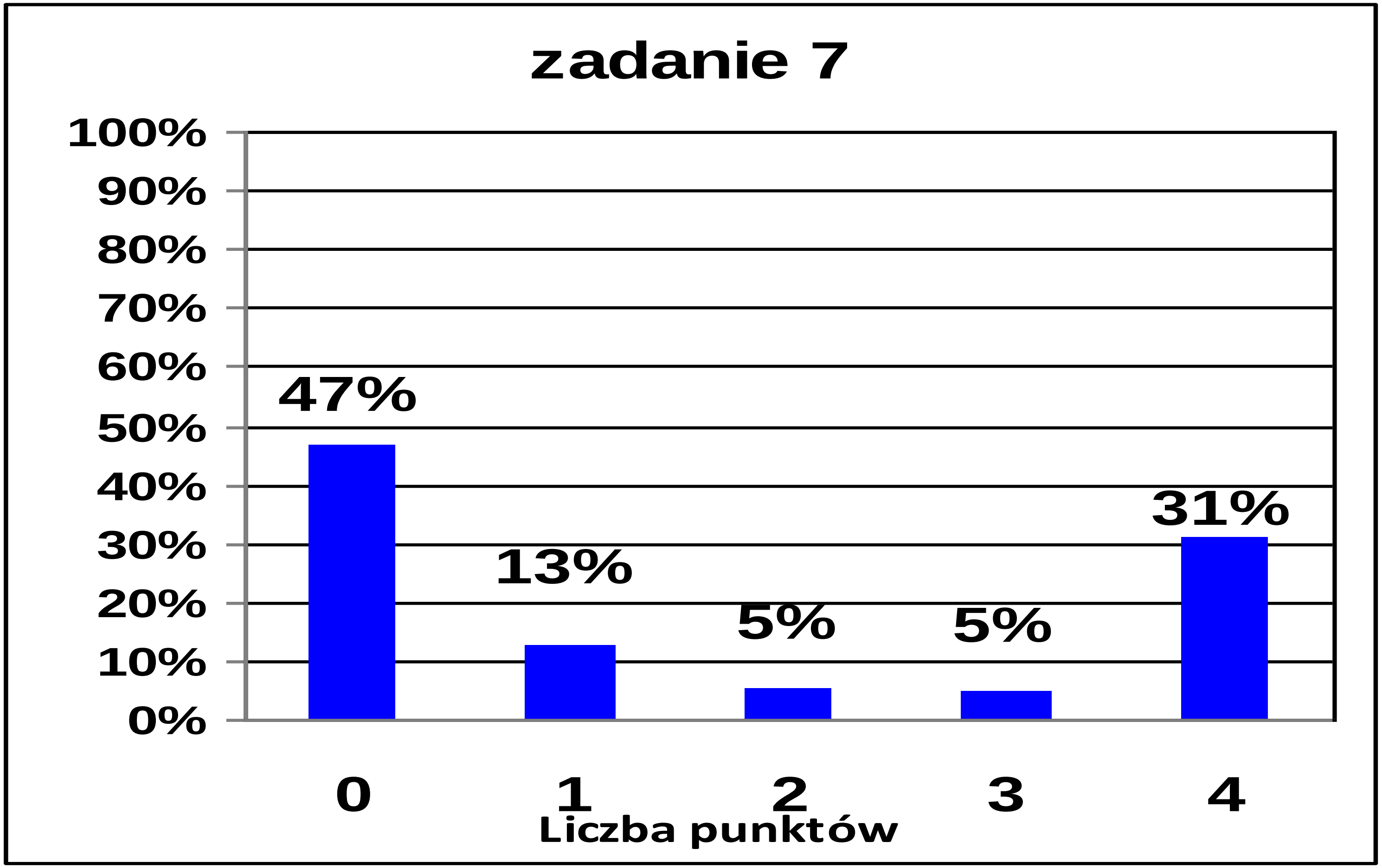
Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ poprowadzonymi przez punkt $A=(2,0)$.

Zadanie **trudne**: ł=0,39

Opuszczenia: $f_{op}=2,6\%$

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na doprowadzeniu odpowiedniego układu do równania kwadratowego z niewiadomą x i parametrem a, albo zapisaniu równania z niewiadomą a, wynikającego z odległości punktu S od prostej stycznej.

Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 7. *(4 pkt)*

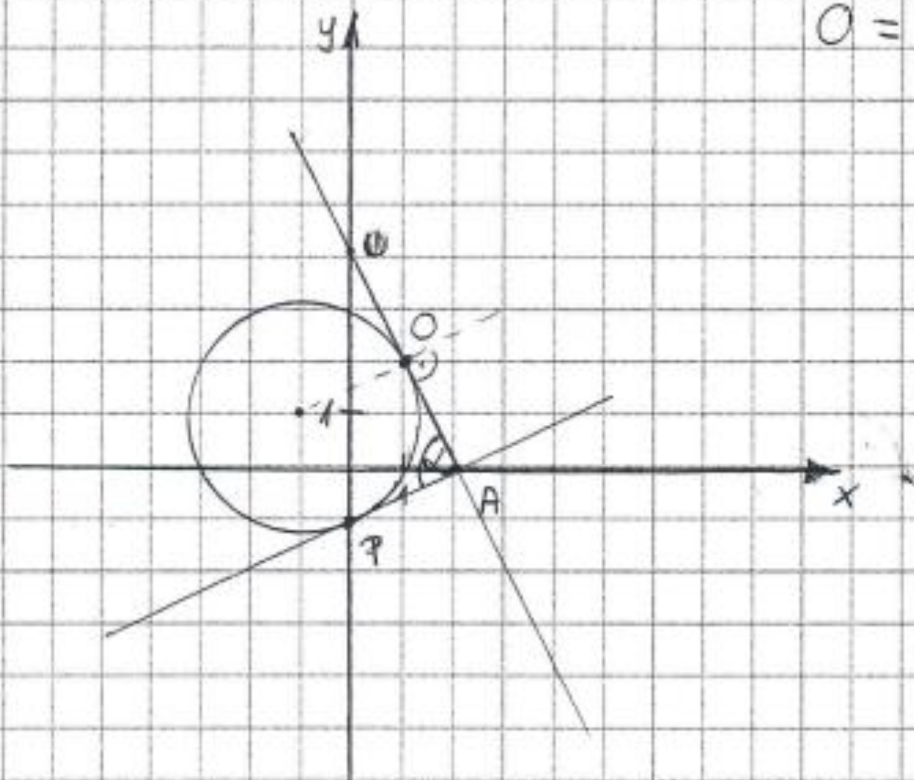
Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2,0)$.

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ $\quad A = (2,0)$

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3 + 1 + 1 = 5$ $\quad \alpha = ?$

$S(-1,1)$ $\quad r = \sqrt{5}$

$0 = 2a + b$



Zadanie 7. *(4 pkt)*

Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2, 0)$.

$y = ax + b$

$D: \; x \in R, \; y \in R$

$0 = 2a + b$

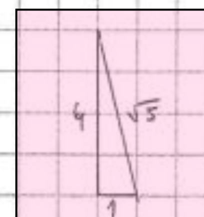
$a = -\frac{b}{2}$

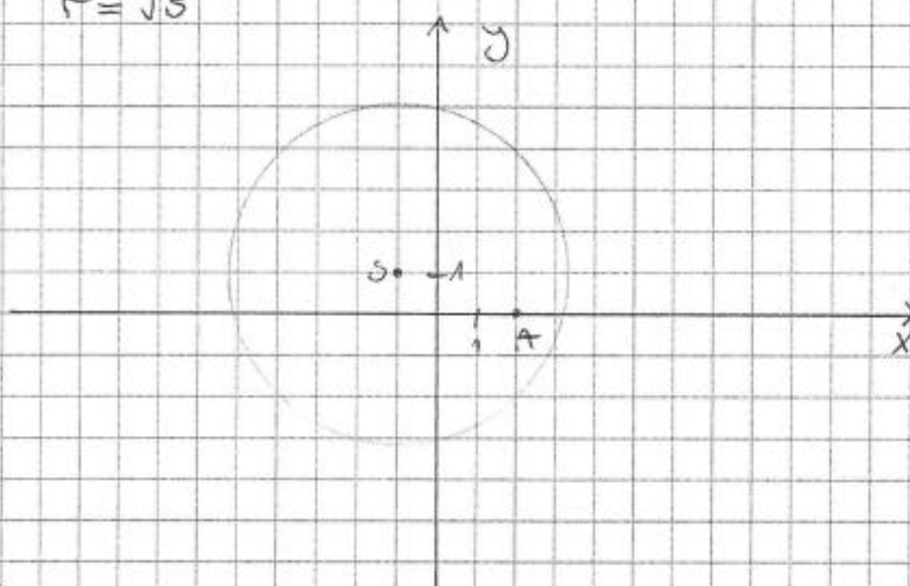
$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 3 + 1 + 1$

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$

$S(-1, 1)$

$r = \sqrt{5}$

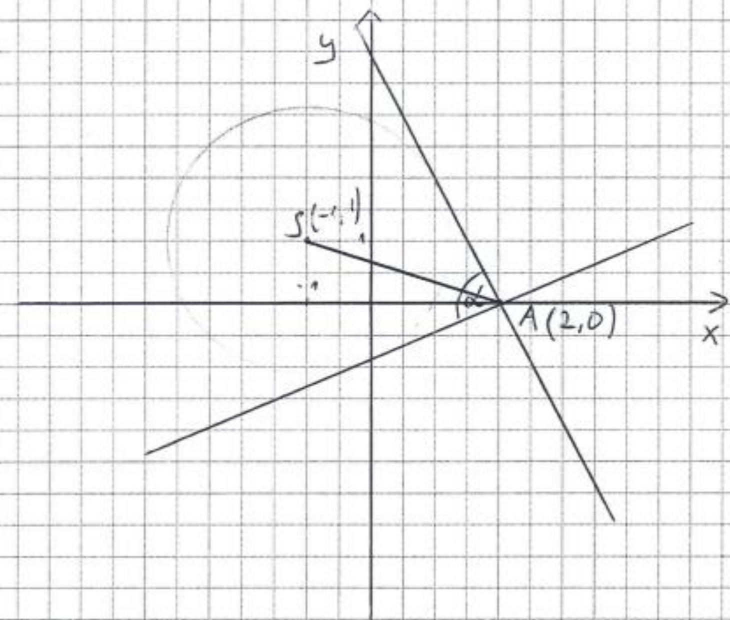




$(x^2+2x+1)-1+(y^2-2y+1)-1-3=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

$S(-1,1), \quad r=\sqrt{5}$



prosta przechodząca przez punkty S i A

$y=ax+b$

$\begin{cases} 0=2a+b \\ 1=-a+b \end{cases}$

$b=a+1$

$0=3a+1$

$a=-\frac{1}{3}$

$0=-\frac{2}{3}+b$

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

Zadanie 7. *(4 pkt)*

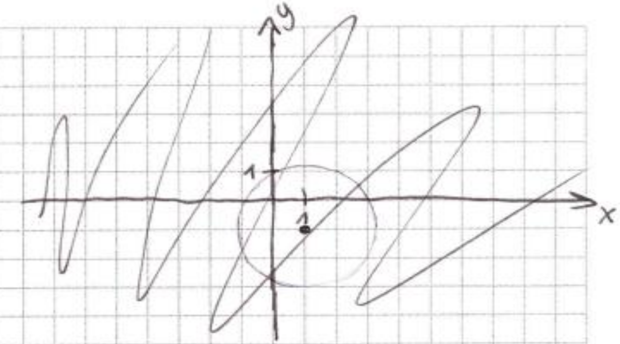
Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2,0)$.

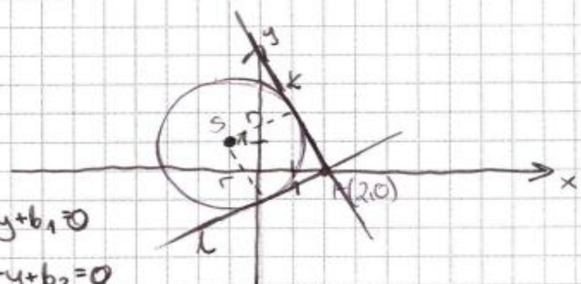
$x^2+y^2+2x-2y-3=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2-1-1-3=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

$S(-1,1), r=\sqrt{5}$





prosta k: $y=a_1x+b_1 \Leftrightarrow a_1x-y+b_1=0$

prosta l: $y=a_2x+b_2 \Leftrightarrow a_2x-y+b_2=0$

k: $y=a_1x+b_1$
$0=2a_1+b_1$
$b_1=-2a_1$

l: $y=a_2x+b_2$
$0=2a_2+b_2$
$b_2=-2a_2$

mamy więc dwie proste postaci: $y=ax-2a$
$ax-y-2a=0$

$\boxed{\sqrt{5}=\frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{1^2+1^2}}}$

$\sqrt{5}=\frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{10}=|-3a-1|$

$\sqrt{10}=|3a+1|$

$\boxed{10=9a^2+1}$

$9a^2=9$

$a^2=1$

$a=1 \vee a=-1$

prosta k: $y=x-2$

prosta l: $y=-x+2$

oznaczmy kąt między prostymi jako α, mamy wtedy:

$tg\alpha=\frac{|a_1-a_2|}{1+a_1 \cdot a_2}$

$tg\alpha=\frac{|1+1|}{1+1(-1)}=\frac{2}{0}$ $\rightarrow$ oznacza to, że tangens kąta α nie istnieje!

możemy przypuszczać więc, że kąt ten ma $90°$, sprawdźmy:

proste są prostopadłe jeśli $a_1 \cdot a_2=-1$

$1\cdot(-1)=-1$

$-1=-1$

TAK, kąt między nimi to $90°$

$x^2+y^2+2x-2y-3=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2-5=0$

• $(x+1)^2+(y-1)^2=5$

• $A=(2,0)$

$S=(-1,1)$

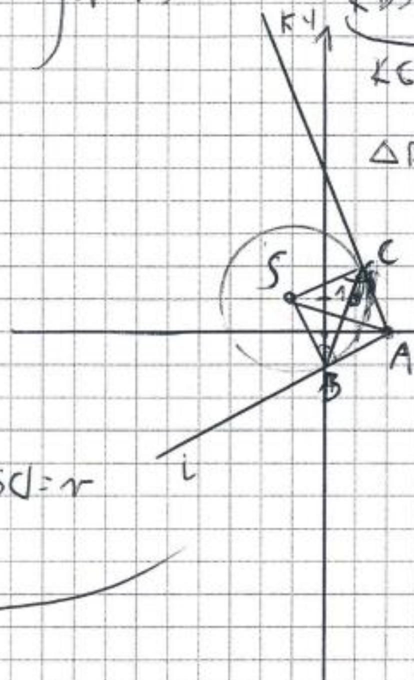
$r=\sqrt{5}$

$\sphericalangle SCB+\sphericalangle SBC+\sphericalangle BSC=180^\circ$

$\sphericalangle CAB+\sphericalangle ABC+\sphericalangle ACB=180^\circ$

$\sphericalangle SCB+\sphericalangle BCA=\sphericalangle SBC+\sphericalangle ABC=90^\circ$

$\sphericalangle BSC=2\cdot\sphericalangle CBA=2\cdot\sphericalangle BCA$



$\sphericalangle CBA=\sphericalangle BCA$

$\Downarrow$

$\triangle BAC$ jest równoramienny

$\Downarrow$

$360^\circ=\sphericalangle ABC\cdot 2+\sphericalangle CBS\cdot 2+\sphericalangle BAC+2\cdot\sphericalangle CBA$

$360^\circ=\underbrace{2\sphericalangle ABC+2\sphericalangle CBS}_{180^\circ}$

$\Downarrow$

$180^\circ=\sphericalangle BAC+2\sphericalangle CBA$

$|SA|=\sqrt{9+1}$

$|SA|=\sqrt{16}$

$\sphericalangle SBA=90^\circ$ $|SB|=|SC|=r$

$\sphericalangle SCA=90^\circ$

$\Downarrow$

$\sphericalangle BAC=\sphericalangle BSC$

$\sphericalangle BSC+\sphericalangle SCB+\sphericalangle CAB+\sphericalangle ABS=360^\circ$

$\Downarrow$

$\sphericalangle BSC+90^\circ+\sphericalangle CAB+90^\circ=360^\circ$

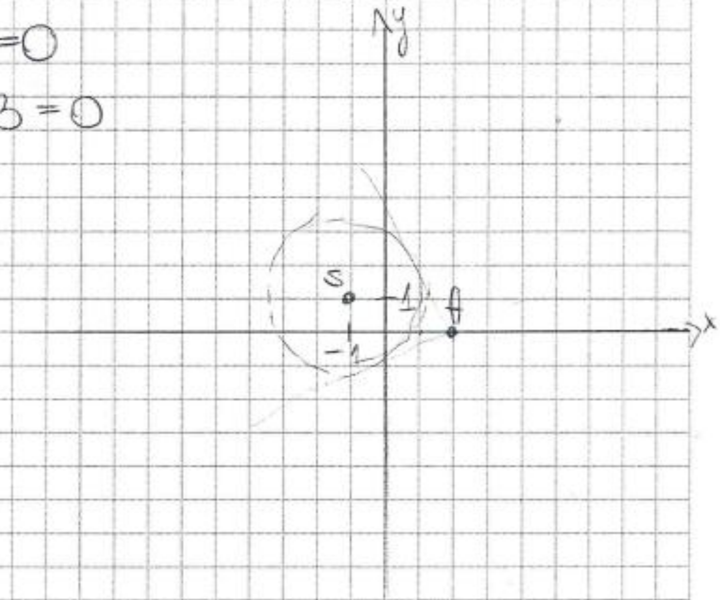
$\sphericalangle BSC+\sphericalangle CAB=180^\circ$

$x^2+y^2+2x-2y-3=0$

$(x+1)^2-1+(y-1)^2-1-3=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

$S(-1,1)\quad r=\sqrt{5}$



$y=ax+b$

$0=2a+b$

$b=-2a$

$y=ax-2a$

$\cancel{0=2a-2a}$

$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-3=0 \\ y=ax-2a \end{cases}$ ma 1 rozw

$x^2+(ax-2a)^2+2x-2(ax-2a)-3=0$

$x^2+a^2x^2-4a^2x+4a^2+2x-2ax+4a+6=0$

$x^2+a^2x^2-4a^2x+2x-2ax+4a^2+4a+6=0$

$x^2(1+a^2-4a^2)+2x(1-a)+4a+4a+6=0$

$\Delta>0$ żeby były dwa rozwiązania

$\Delta=b^2-4ac=(2-2a)^2-4(1+a^2-4a^2)(8a+6)=$

$=-(4-8a+4a^2)\cancel{-(4+12a^2)}$

$4A\cdot Ax = 4A^2x$ $-2A-1$ $-(+2A+1)$

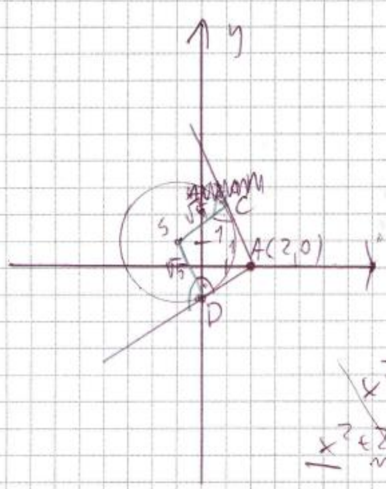
Zadanie 7. *(4 pkt)*

Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2, 0)$.

$x^2+2x+1+y^2-2y+1-3-2=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

$S=(-1,1)$ $r=\sqrt5$



$y=Ax+B$

$0=2A+B$

$B=-2A$

$y=Ax-2A$

$x^2+2x+1+(Ax-2A-1)^2=5$

$x^2+2x+1+A^2x^2+2\cdot2A\cdot1\cdot Ax+4A^2+4A+1=5$

$x^2(1+A^2)+2x+4A^2x+1+4A^2+4A+1-5=0$

$x^2(1+A^2)+x(2+4A^2)+4A^2+4A-3=0$

$\Delta=0$

$\Delta=16A^4+16A^2+4-4(4A^2+4A-3)(1+A^2)$

$\Delta=16A^4+16A^2+4(-16A^2-16A+12)(1+A^2)$

$0=\cancel{16A^4}+\cancel{16A^2}+4-\cancel{16A^2}-16A+12-\cancel{16A^4}-16A^3+12A^2$

$\Delta=16A^3+12A^2-16A+16=0$

$4A^3+3A^2-4A+4=0$

$C=(1,2)$

$D=(0,-1)$

$A=(2,0)$

$y=Ax+B$

$2=A+B$

$-1=B$

$2=A-1$

$A=3$

$0=2A+B$

$B=-2A$

$2=A-2A$

$2=-A$

$A=-2$

$B=0$

$\begin{cases}2=A+B\\0=2A+B\end{cases}$ $B=-2A$

$2=A-2A$

$A=-2$

$2=-2+B$

$B=4$

$y=-2x+4 \to$ pr. CA

$\begin{cases}-1=B\\0=2A+B\end{cases}$

$0=2A-1$

$A=\frac12$

$0=1+B$

$y=\frac12x-1$ pr. DA

proste CA i DA są prostopadłe do okręgu

$|CA|=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt5$

$|AD|=\sqrt{(0-2)^2+(-1)^2}=\sqrt5$

$|SC|=|CA|=|AD|=|SD|$, $\sphericalangle SCA=90^\circ$

$\sphericalangle SDA=90^\circ$ więc

$\sphericalangle CSD$ i $\sphericalangle CAD=90^\circ$

zatem figura SCAD to kwadrat.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 8. (4 punkty)	Standard III (MOD)

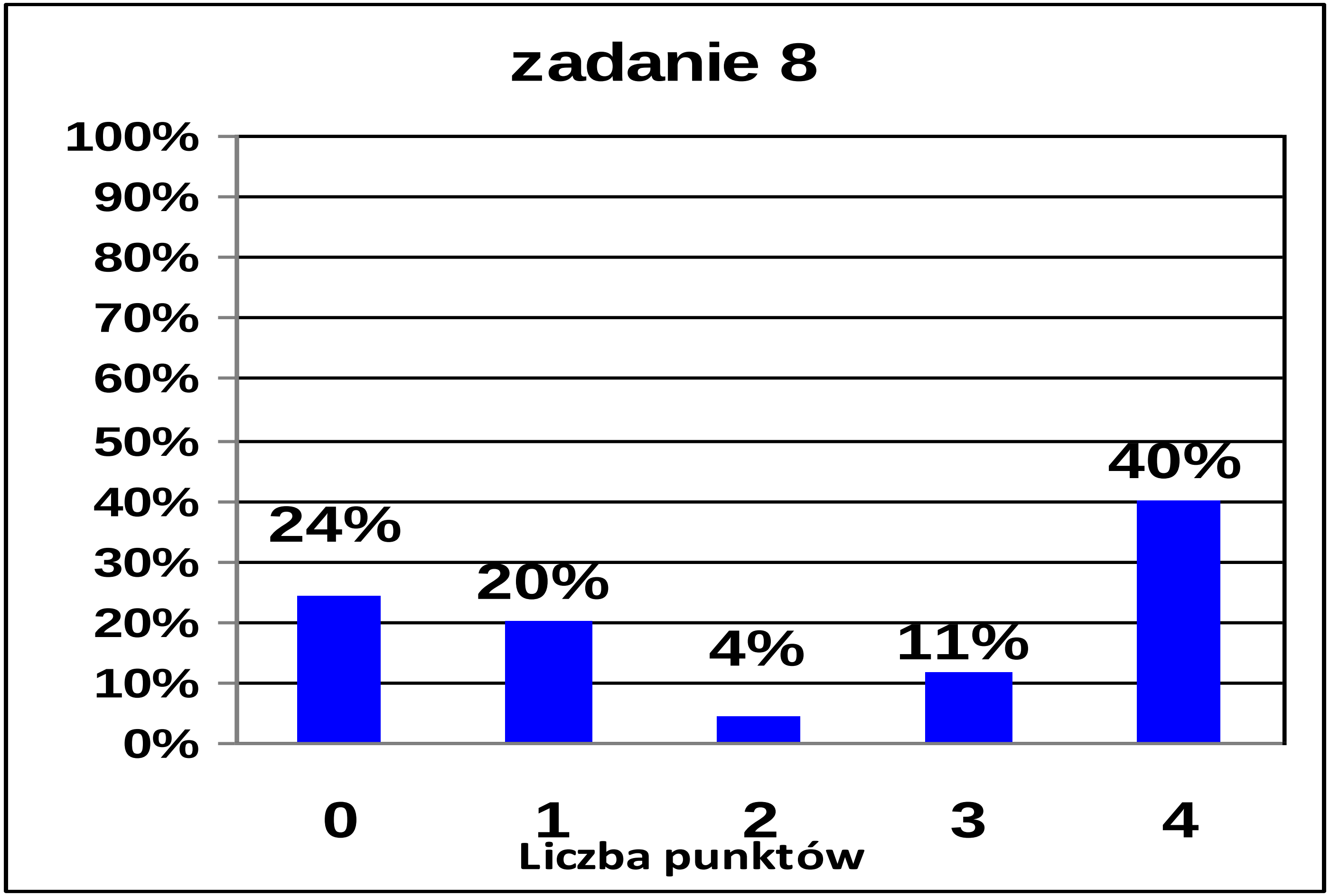
Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

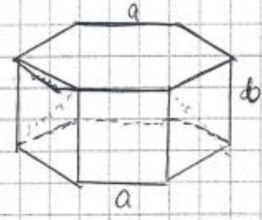
Zadanie **umiarkowanie trudne**: ł=0,54

Opuszczenia: $f_{op}=5,3\%$

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na zapisaniu pola powierzchni bocznej tego graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej.

Rozkład uzyskanych punktów





$\cancel{6a+6a+6b=18a}=24$

$\cancel{18a=24}$

$\cancel{a=\frac{24}{18}}$

$\cancel{a=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}}$

$6a+6a+6b=24$

$6(2a+b)=24$

$2a+b=4$

$a=\frac{4-b}{2}$

$a=\frac{4-3}{2}$

$a=\frac{1}{2}\,[j]$

$\boxed{P_{p_{max}}=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

$P_p=6\cdot\frac{\frac{(16-8b+b^2)}{4}\sqrt{3}}{4}$

$P_p=6\sqrt{3}\cdot(b^2-8b+16)$

$P_p=6\sqrt{3}b^2-48\sqrt{3}b+96\sqrt{3}$

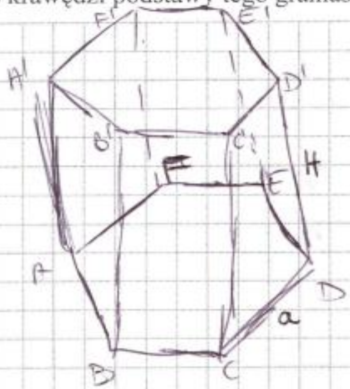
$\Delta_b=6912-4\cdot3\cdot576$

$\Delta_b=6912-6912=0$

$b_0=\frac{48\sqrt{3}}{12\sqrt{3}}$

$b_0=3$

Zadanie 8. *(4 pkt)*
Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.



$12a+6H=24$

$2a+H=4$

$\boxed{P_b=a\cdot H}$

$2a+H=4 \iff H=4-2a$

$P_b=a\cdot H$

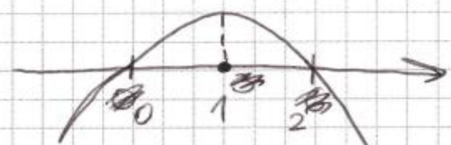
$a(4-2a)$

$P_b=a\cdot H=$

$=a(-2a+4)$

$a=0 \vee 2a=4$

$a=2$



Jest to parabola z ramionami w dół.

Widzimy, że przy zależności $2a+H=4$ pole boczne w zależności od a jest właśnie taką funkcją.

$f(x)=a(-2a+4)$

$0=a(-2a+4)$

$a=0 \vee a=2$

Dla naszej paraboli wartość jest największa w wierzchołku, czyli gdy $a=1$ i to jest właśnie szukana długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

$P_L = 12a \cdot h$

$12a + 6h = 24$

$2a + h = 4$

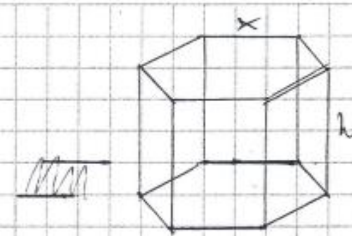
$h = 4 - 2a$

$P_b = 12a \cdot (4 - 2a) = 48a - 24a^2 =$

$= -24a^2 + 48a$

$p = \frac{-48}{-48} = 1$

$\begin{cases} a = 1 \\ h = 2 \end{cases}$



$$12\cdot x+6\cdot h=24$$

$$\boxed{x\cdot h\cdot 6+6\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2=P_b}$$

$$6h=24-12x$$

$$h=4-2x$$

$$x\cdot(4-2x)\cdot 6+6\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\cancel{2}^{1}=$$

$$=(4x-2x^2)\cdot 6+3\sqrt{3}\,x^2=$$

$$=24x-12x^2+3\sqrt{3}\,x^2=\cancel{(12+3\sqrt{3})x^2}$$

$$=(3\sqrt{3}-12)x^2+24x$$

$$a=3\sqrt{3}-12<0$$

$$p=\frac{-b}{2a}=\frac{-24}{3\sqrt{3}-12}=$$

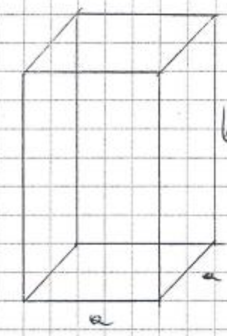
$$=\frac{-24(3\sqrt{3}+12)}{9\cdot 3-144}=$$

$$=\frac{\overset{8}{\cancel{-24}}(3\sqrt{3}+12)}{\cancel{-117}_{39}}=$$

$$=\frac{8(3\sqrt{3}+12)}{39}=\frac{24\sqrt{3}+96}{39}=\frac{8\sqrt{3}+32}{13}$$

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.



~~4a+~~ $8a+4b=24$

$2a+b=6$

$b=6-2a$

$P_b = 2a^2+4\cdot ab$ – największe

$P_b = 2a^2+4\cdot a(6-2a)$

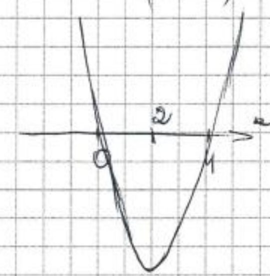
$P = 2a^2+24a-8a^2$

$P = -6a^2+24a$

$P = \cancel{-6a(}$

$P = a(-6a+24)$

$P = -6a(a-4)$



Najmniejsza wartość jest w wierzchołku

$x_w = 2$

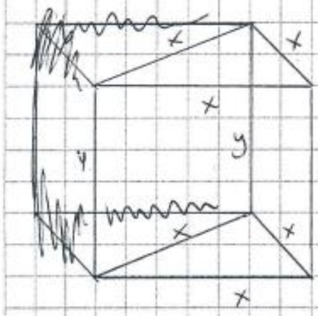
$a=2$

$\boxed{24 = 6\cdot x + 3\cdot y}$ $/:3$

$8 = 2x + y$

$y = 8 - 2x$

$\boxed{x\cdot y = P_b}$



~~$P_b - max \Rightarrow P_b = a^2 =$ kwadrat~~

~~$y = x$~~

$P_b = x\cdot(8-2x)$

$P_b = 8x - 2x^2$

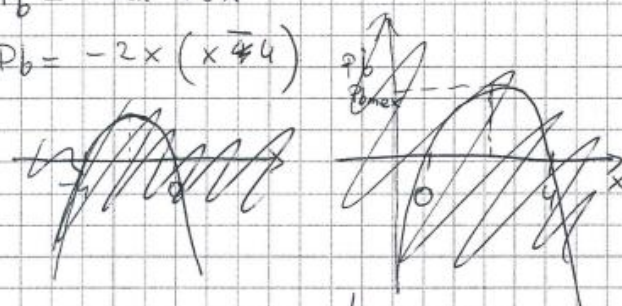
~~$8 = 2x + x$~~

~~$3x = 8$~~

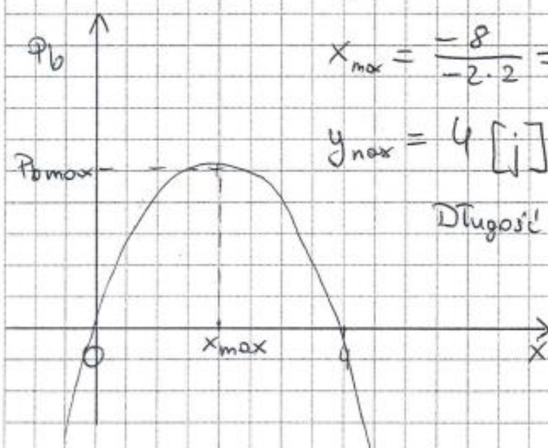
~~$x = \frac{8}{3}$~~

$P_b = -2x^2 + 8x$

$P_b = -2x(x-4)$



$P_{b\,max} \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$



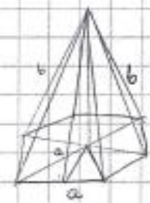
$x_{max} = \frac{-8}{-2\cdot 2} = \frac{-8}{-4} = 2\,[j]$

$y_{max} = 4\,[j]$

Długość krawędzi podstawy $= x$

Zadanie 8. *(4 pkt)*

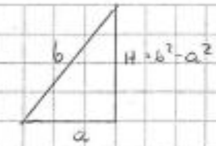
Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

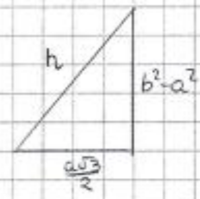


$\boxed{6a + 6b = 24}$

$a + b = 4$

$b = 4 - a$





$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (b^2 - a^2)^2$

$h^2 = \frac{3a^2}{4} + b^4 - 2a^2b^2 + a^4 \qquad h = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + b^4 - 2a^2b^2 + a^4}$

$P_b = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} + b^4 - 2a^2b^2 + a^4}$

$P_b = 3a \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} + (4-a)^4 - 2a^2(4-a)^2 + a^4} =$

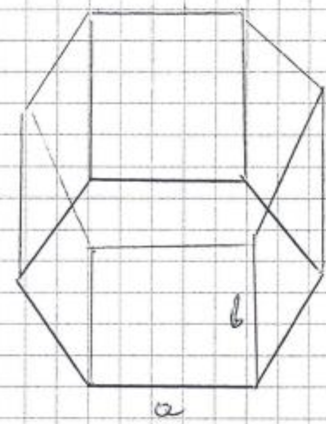
~~$3a \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} + 16 - 8a + a^2 - (8a^2}$~~

$P_b = 3a\sqrt{\frac{3a^2}{4} + (16 - 8a + a^2)^2 - 2a^2(16 - 8a + a^2) + a^4}$

$P_b = 3a\sqrt{\frac{3a^2}{4} + (16 - 8a + a^2)(16 - 8a + a^2) - 32a^2 + 16a^3 - a^3 + a^4}$

$P_b = 3a\sqrt{\frac{3a^2}{4} + 256 - 128a + 16a^2 - 128a + 64a^2 - 8a^3 + 16a^2 - 8a^3 + a^4 - 32a^2 + 16a^2 - a^3 + a^4}$

$P_b = 3a\sqrt{2a^4 - 17a^3 + 80a^2 - 256a + 256 + \frac{3a^2}{4}}$



$12a + 6b = 24$

$6(2a+b) = 24$

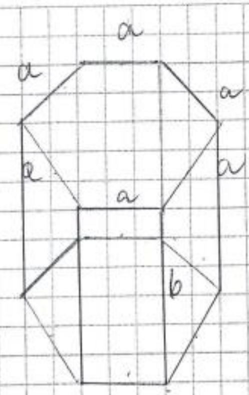
$2a + b = 4$

$\boxed{6 \cdot ab = \max}$

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

$\boxed{12a = 24 - 6b}$



$12a + 6b = 24$

$P_b = 2 \cdot \text{Obwód podstawy} \cdot h$
(p)

$p = 12a$

$P_b = 12a \cdot b = (24 - 6b)b$

$P_b = 6b(4 - b)$ $\quad b \neq 4$

największe powierzchnie boczne jest wtedy, gdy
$a = b$

$12a + 6a = 24$

$18a = 24$

$\boxed{a = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}}$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

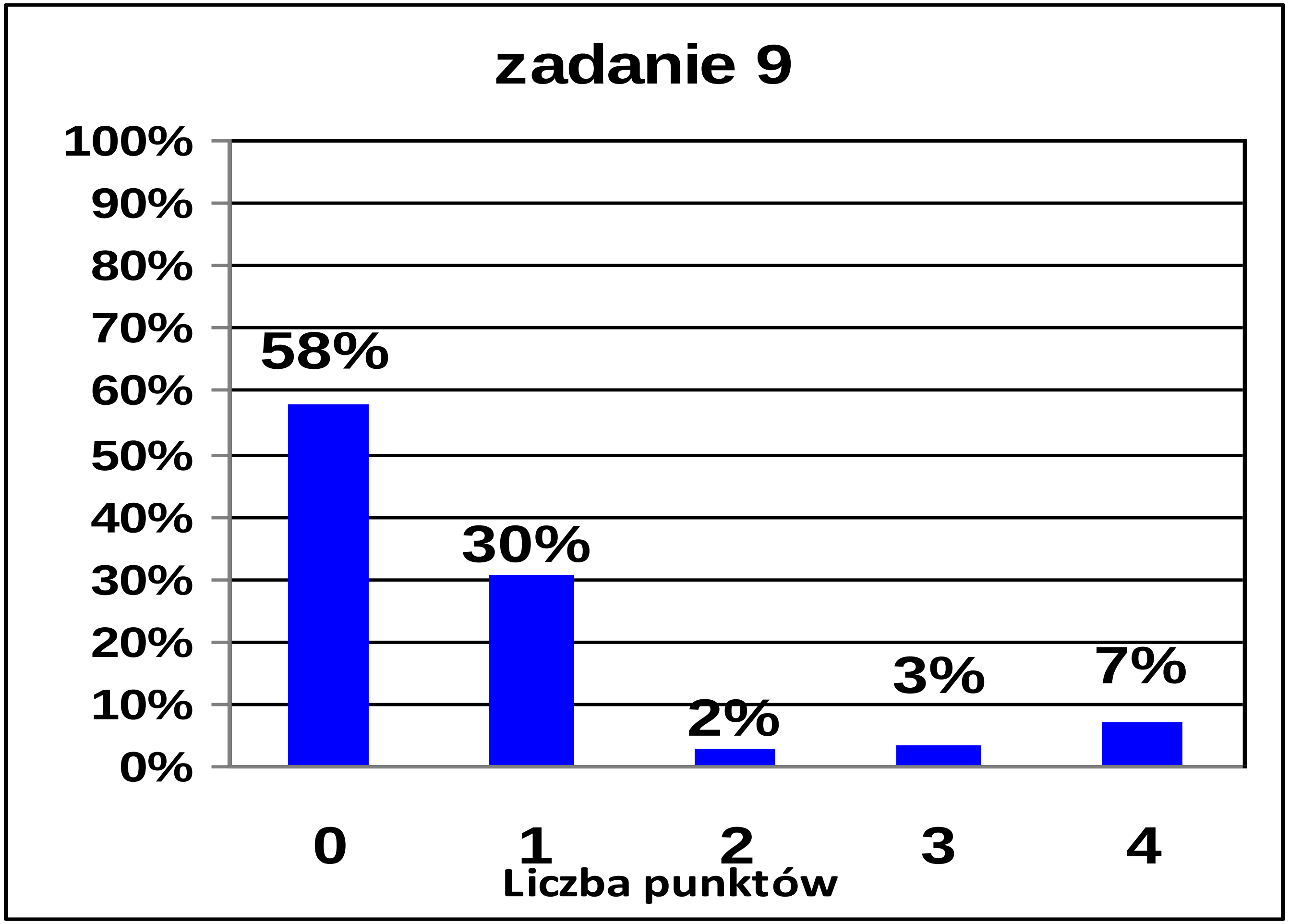
Zadanie 9. (4 punkty)	Standard IV (STR)

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

Zadanie **bardzo trudne**: ł=0,17
Opuszczenia: f_{op}=3,8%

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na obliczeniu liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki **i** liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki.

Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 9. *(4 pkt)*
Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

Policzę ile jest ciągów ośmioelementowych złożonych z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, które zawierają conajmniej dwie dwójki i trzy trójki.

W 8-elementowym ciągu trójki mogę rozmieścić na $\binom{8}{3}$ sposobów. Następnie po rozmieszczeniu trójek dwójki mogę rozmieścić na $\binom{5}{2}$ sposobów. Pozostałe 3 miejsca mogą zostać uzupełnione dowolną z dziewięciu cyfr do wyboru t.j. na 9^3 sposobów. Zatem ośmiocyfrowych opisanych ciągów (a zatem liczb z zadania) jest

$$\boxed{\underbrace{\binom{8}{3}}_{\substack{\text{rozmieszczenie}\\ 3\times\text{trójek}}} \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{\substack{\text{rozmieszczenie}\\ 2\times\text{dwójek}}} \cdot \underbrace{9^3}_{\substack{\text{pozostałe}\\ 3\text{ miejsca}}}} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6}\cdot\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 9^3 = 560\cdot 9^3$$

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6}\cdot\frac{5\cdot 4}{2} = \frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}$$

Odpowiedź: ~~56~~ $\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot 9^3 = 408240$

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

2 2 3 3 3 . . . 7 · 7 · 7

1, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$C_8^5 = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3!} = 56$

111 – 199

311 – 399

411 – 499

511 – 599

611 – 699

711 – 799

811 – 899

911 – 999

bez

~~20~~, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

$6 \cdot 8 = 48$

bez

20 – 29

30 – 39

38840

$8 \cdot 99$ liczb $- 20 \cdot 8 - 6 \cdot 8$

=

bez 2 i 3 i 0

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$

$56 \cdot 343 = 19\,208$

Odpowiedź: Jest 19 208 liczb

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

wszystkich liczb ośmiocyfrowych jest — $8 \cdot 9^7$

$2\ 2\ 3\ 3\ 3\ \_\ \_\ \_$

~~$x = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9^3$~~

~~$x = C_8^1 C_7^1 \cdot C_6^1 C_5^1 C_4^1 \cdot 9^3 = 4898880$~~

$$\bar{\bar{A}} = C_8^5 \cdot 9^3 = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot 9^3 = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} \cdot 9^3$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9^3 = 4898880$$

Szukaną liczbę liczb ozn. x.

$$x = C_8^2 + C_{8-2}^3 + 9^{(8-2-3)}$$

dwójki występują na dowolnych dwóch miejscach, przy czym ~~ich~~ kolejność ich występowania nie ma znaczenia.

a trójki znajdują się na dowolnych z pozostałych miejsc, kolejność ponownie nie ma znaczenia.

pozostałe miejsca wypełniamy cyframi od 0 do 9.

$$x = \binom{8}{2} + \binom{6}{3} + 9^3 = \frac{8!}{2\cdot 6!} + \frac{6!}{3!\cdot 3!} + 9^3 =$$

$$= \frac{7\cdot 8}{2} + \frac{2\cdot \cancel{4}\cdot 5\cdot \cancel{2}\cdot 2}{8\cdot \cancel{3}} + 9^3 = 7\cdot 4 + 4\cdot 5 + 9^3 = 777$$

Odpowiedź: Takich liczb jest 777.

1 3 5 6 7 8 9

8 ...

7 7 7 3 3 3 2 2

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$

3 3 3 2 2

3 3 2 2

$n = 8$
$k = 5$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot3\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{40320}{2160} =$$

$= 18,66$

3 3 3 2 2

obliczamy ile jest różnych kombinacji ustawienia tych cyfr

$343 \cdot 18,66 \approx 6402$

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

2 2 3 3 3 _ _ _

~~2·3·7·7·7 = 2058~~

jedna 2 może stać na 1 z 8 miejsc
druga 2 – II – 1 z 7 miejsc
jedna 3 – II – 1 z 6 miejsc
druga 3 – II – 1 z 5 miejsc
trzecia 3 – II – 1 z 4 miejsc

na trzech pozostałych miejscach mogą stać liczby {1, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = \underline{2304960}$

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

~~2 dwójki~~
3 trójki
~~0 zer~~

~~2 2 3 3 3 · 210~~

~~2 2 3 3 3 210~~

~~2 2 3 3 3~~

~~2 2 3 3 3~~

~~3 2 2 3 3~~

~~3 3 2 2 3~~

~~1 · 210 + 1 · 210~~

~~8! · 210 = 8467200~~

w liczbie
Ma być: 0 zer
3 trójki
2 dwójki

Liczba permutacji 2 dwójek i 3 trójek w liczbie ośmiocyfrowej = 8!
2 dwójki i 3 trójki to 5 cyfr, więc zostają nam jeszcze 3 cyfry do uzupełnienia, które możemy wyznaczyć na: 7·6·5 sposobów
7·6·5 = 210

Wynika z tego, że liczb, ~~tto~~ ośmiocyfrowych, które zawierają 2 dwójki i 3 trójki i nie zawierają zer można ułożyć 8! · 210

8! · 210 = 8467200

Odpowiedź: Jest 8467200 liczb spełniających warunki zadania.

~~{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}~~

~~A – zdarzenie, że w zapisie liczby ośmiocyfrowej nie występuje zero,~~

2 2 3 3 3 1 1 1

4 4 4
5 5 5
6 6 6
7 7 7
8 8 8
9 9 9

2 2 3 3 3 x x x
2 3 2 3 3 x x x

{3}

9^3

2 2 3 3 3 R

2 3 2 3 3 R
2 3 3 2 3 R
2 3 3 3 2 R

~~9·9·9·8·5 = 29160~~

2 2 3 3 3
2 2 3 3 3
2 2 3 3 3
2 2 3 3 3

2 3 2 3 3
2 3 2 3 3
2 3 2 3 3
2 3 2 3 3

2 3 3 2 3
2 3 3 2 3

2 3 3 3 2

3 2 3 3 2
3 2 2 3 3
3 2 3 2 3
3 3 2 2 3
3 3 3 2 2

$4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^3 =$

$= 4\cdot 7^3 \cdot 9 =$

$= 12348$

Odpowiedź: Jest 12348 takich liczb.

$$\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \Big|\ \underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}$$

x	y	z
1, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1, 4, 5, 6, 7, 8, 9
7 możl	7 możl	7 możl

$$\underbrace{7\cdot 7\cdot 7}_{343}$$

$$C_8^2\, C_8^3 \cdot 343 =$$

$$= \binom{8}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot 343 =$$

$$= \frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot 343 =$$

$$= \frac{\cancel{6!}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{6!}\cdot 2}\cdot\frac{\cancel{5!}\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{\cancel{5!}\cdot 2\cdot 3}\cdot 343 =$$

$$= \frac{56}{2}\cdot\frac{\cancel{6}\cdot 56}{\cancel{6}}\cdot 343 =$$

$$= 28\cdot 56\cdot 343 =$$

$$= \underline{\underline{537824}}$$

Odpowiedź: Jest 537824 takich liczb.

Zadanie 9. *(4 pkt)*
Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

~~_ _ _ _ _ 7 7 7 możliwości~~
~~2 2 3 3 3 cyfry~~

~~243 · 8!~~

~~możliwości 243 243 możliwości na 8 miejscach~~

~~243 · 8! =~~

2	2	3	3	3	1456789	1456789	1456789	cyfry	243
1	1	1	1	1	7	7	7	ilość	

~~243 · 8! =~~

$243 \cdot 8! = 9797760$

Odpowiedź: 9797760

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

$5! \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

2 2 3 3 3 1 1 1

4 4 4

5 5 5

6 6 6

7 7 7

8 8 8

9 9 9

$\boxed{5! \cdot 7^3} = 120 \cdot 343 =$

$= 41160$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

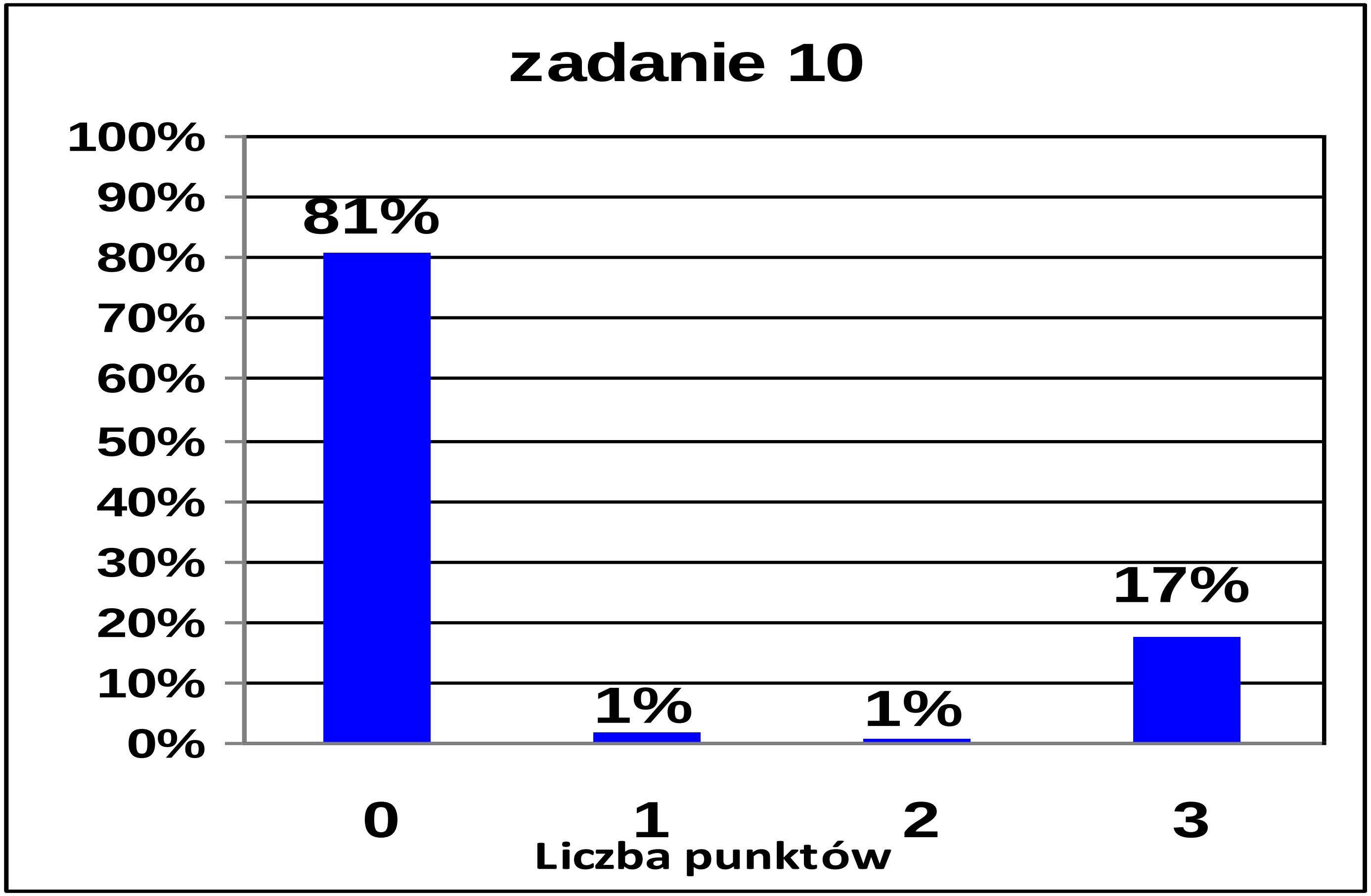
Zadanie 10. (3 punkty)	Standard V (ROZ)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \| PN$.

Zadanie **bardzo trudne**: ł=0,18
Opuszczenia: f_{op}=6,2%

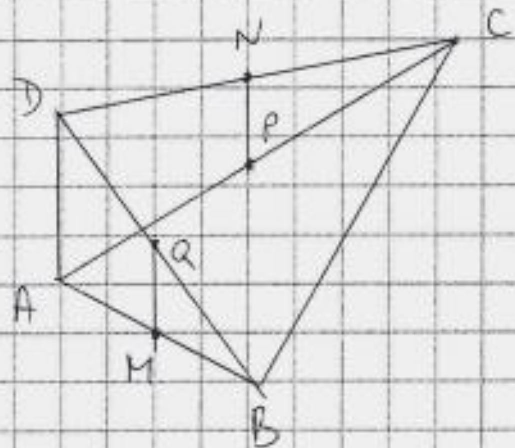
Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na zapisaniu i uzasadnieniu równoległości odcinków NP i AD oraz odcinków MQ i AD.

Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 10. *(3 pkt)*

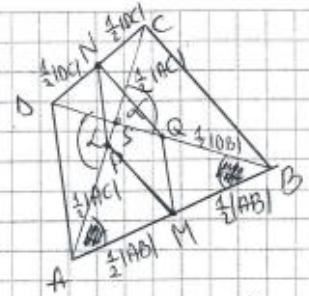
Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.



z rysunku wynika, że $MQ \parallel PN$, czyli teza jest prawdziwe

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.



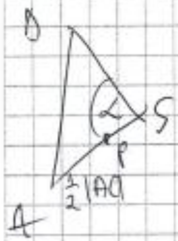
Czworokąt NPMQ to ~~trapez~~

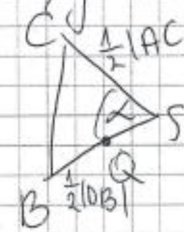
Teza: $MQ \parallel PN$

Dowód:

~~Czworokąt~~

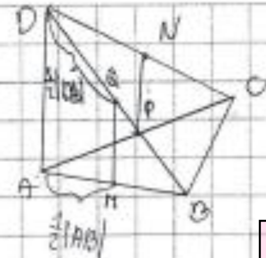
α – kąty wierzchołkowe





Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.



~~|MQ| ||~~

$MQ \parallel PN$

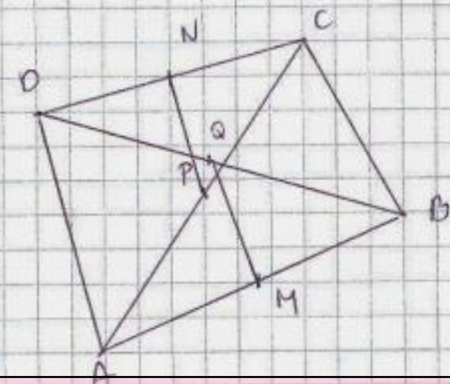
Trójkąty ACD i △ABD są do siebie podobne ~~...~~ i mają wspólny bok.

Odcinki NP i MQ są odległościami między środkowymi boków z których składa się ten trójkąt.

Stąd wynika, że odcinki NP i MQ są do siebie równoległe.

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.



$\Delta ABD \sim \Delta QMB$ (k,k,k)

~~słowo~~ te trójkąty są podobne dlatego $DA \parallel QM$

$\Delta DCA \sim \Delta NCP$ (kkk) $\Rightarrow DA \parallel NP$

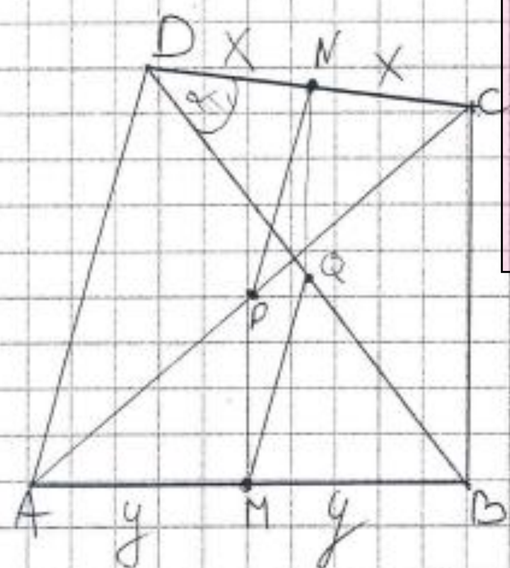
Słowo ΔACD i ΔDBA mają wspólną podstawę (AD) i te podstawy się pokrywają, ja słowo ~~AD każdy punkt w odcinku AD jest równo~~ $AD \parallel MQ$

i $AD \parallel NP$

z tego wynika, że $NP \parallel QM$

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.

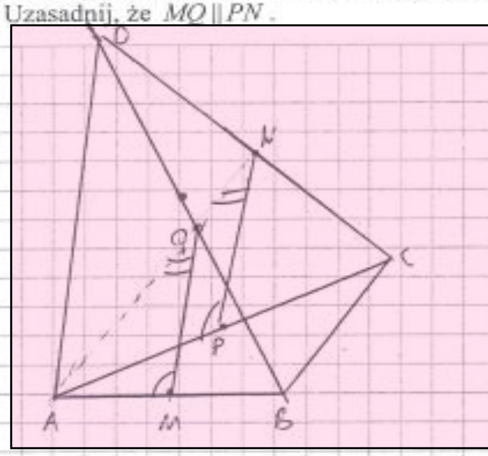


~~Punkty~~ kąty PMQ i PNQ oraz MPN i MQN są takie same.

~~Tworzą~~ o są to kąty wewnętrzne równoległoboku stworzonego na wierzchołkach PNQM. Z tego powodu ~~proste~~ odcinki MQ i PN są równoległe.

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.



$|MQ| = |PN|$

$\sphericalangle AMQ = \sphericalangle APN$

$\sphericalangle AQM = \sphericalangle ANP$

$\triangle AMQ \sim \triangle APN \rightarrow$ bok, kąt, kąt

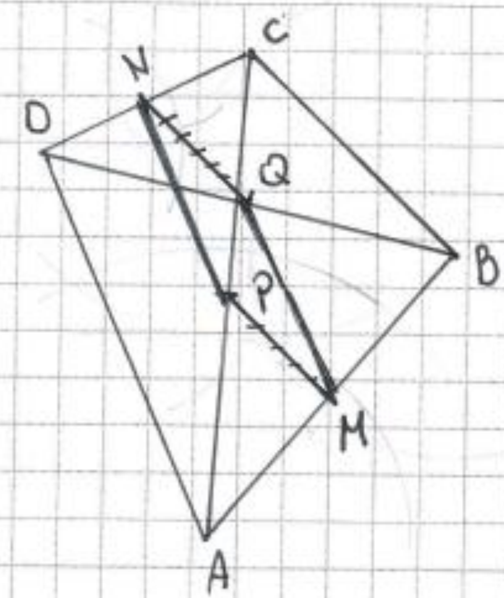
tak więc skoro kąty są takie same, odpowiednio

$\sphericalangle AMQ$ i $\sphericalangle APN$ oraz $\sphericalangle AQM$ ~~[illegible]~~ i $\sphericalangle ANP$

to $|MQ| \parallel |PN|$

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.



$MQ \parallel PN$

~~Zauważam, że $|NQ| \parallel |CB|$~~
~~$|PM| \parallel |CB|$~~
~~zatem~~

Zauważam, że $|NP| \parallel |DA|$
$\wedge$ $|MQ| \parallel |DA|$

z tw. Talesa.

$$\frac{|CN|}{|NP|} = \frac{|CD|}{|DA|}$$

$$\wedge \frac{|BM|}{|MQ|} = \frac{|AB|}{|DA|}$$

Jeżeli ten stosunek będzie prawdziwy

to $|NP| \parallel |DA|$ $\wedge$ $|MQ| \parallel |DA|$

zatem $|NP| \parallel |MQ|$

CND.

np.

~~3, 7, 4, 5 - dł. odp. boków~~

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 11. (6 punktów)	Standard IV (STR)

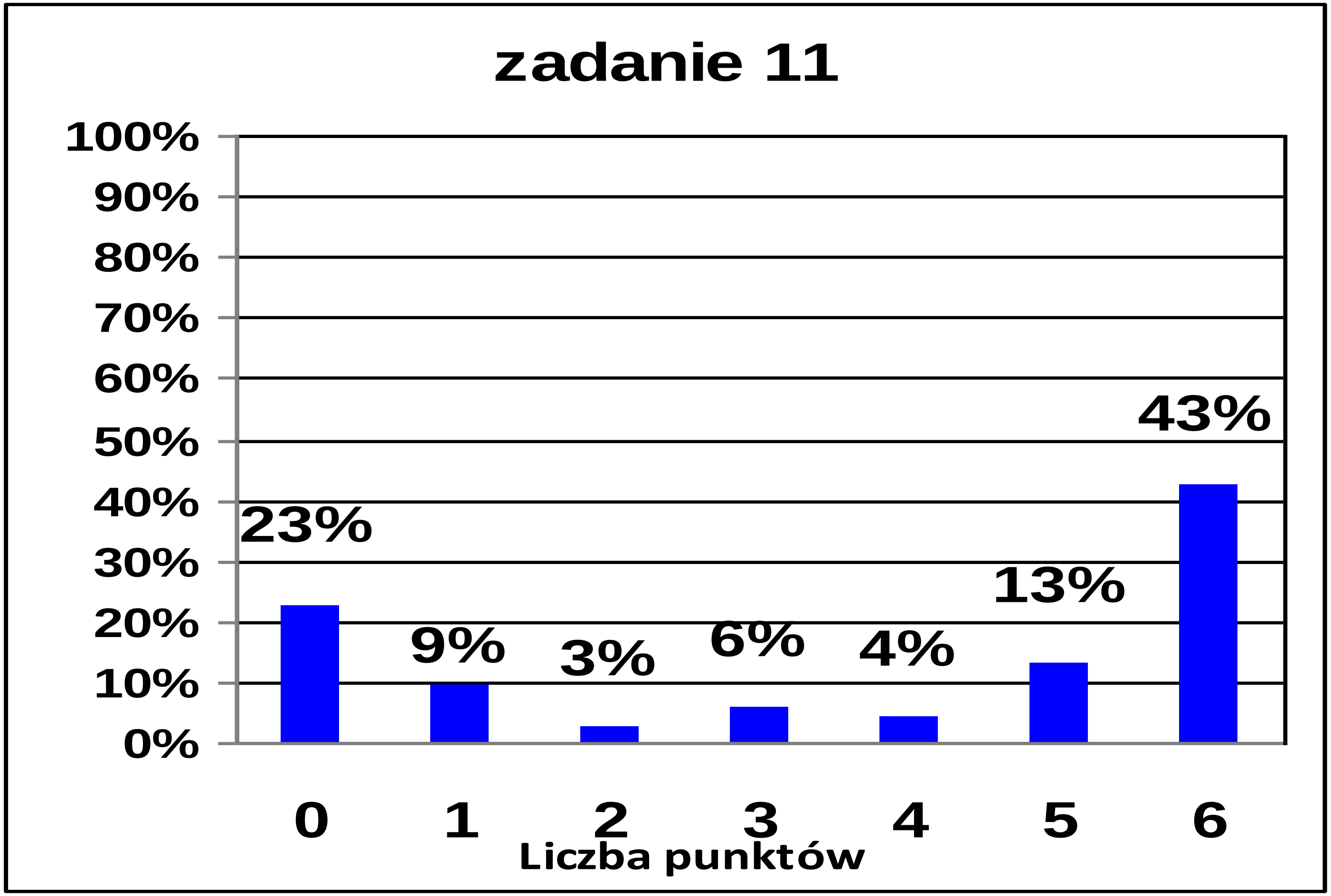
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS|=6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

Zadanie **umiarkowanie trudne**: ł=0,60
Opuszczenia: $f_{op}=1,7\%$

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na wyznaczeniu wysokości ściany bocznej.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

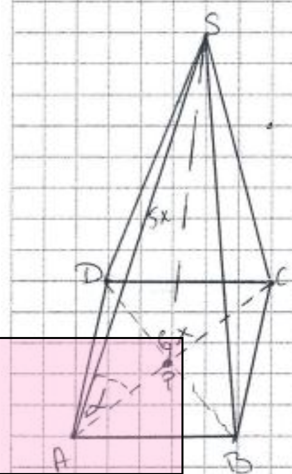
Rozkład uzyskanych punktów

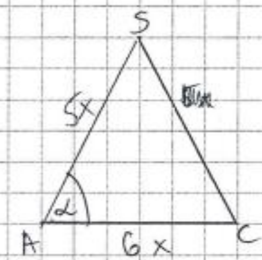


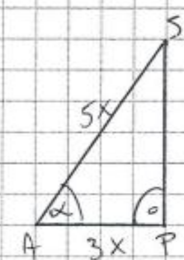
Zadanie 11. *(6 pkt)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

$\alpha = ?$







$$\cos\alpha = \frac{3\cancel{x}}{5\cancel{x}} = \frac{3}{5}$$

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$1 - \frac{9}{25} = \sin^2\alpha$$

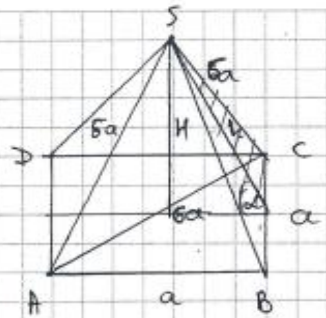
$$\frac{16}{25} = \sin^2\alpha$$

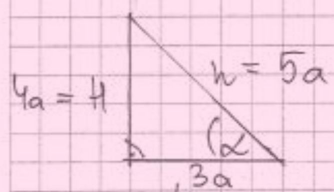
$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

Odp: Sinus nachylenia ściany bocznej to $\frac{4}{5}$.

Zadanie 11. *(6 pkt)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.





$\sin\alpha = \frac{4a}{h}$

$\cos\alpha = \frac{3a}{h}$

$\left(\frac{4a}{h}\right)^2 + \left(\frac{3a}{h}\right)^2 = 1$

$\frac{16a^2}{h^2} + \frac{9a^2}{h^2} = 1$

$\frac{25a^2}{h^2} = 1$

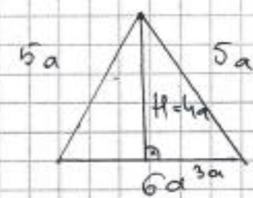
$h^2 = 25a^2$

$h = 5a$

$|AC| : |AS| = 6:5$

$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{6}{5} \Rightarrow 5|AC| = 6|AS|$

$\sin\alpha = ?$

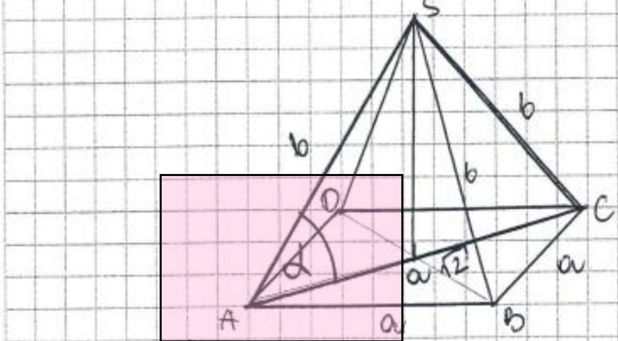


$H^2 = 25a^2 - 9a^2$

$H^2 = 16a^2$

$H = 4a$

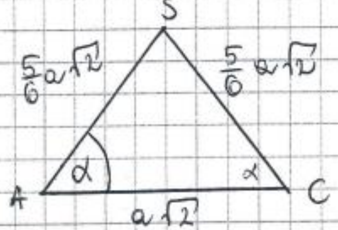
$\sin\alpha = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5}$



$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{6}{5}$$

$$5|AC| = 6|AS|$$

$$5a\sqrt{2} = 6b$$



$$\frac{a\sqrt{2}}{|AS|} = \frac{6}{5}$$

$$5a\sqrt{2} = 6|AS|$$

$$|AS| = \frac{5}{6}a\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{5}{6}a\sqrt{2}\right)^2 = (a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{5}{6}a\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot(a\sqrt{2})\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{5}{6}a\sqrt{2}\right)\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{25}{36}a^2\cdot 2 = 2a^2 + \frac{25}{36}a^2 2 - 2(a\sqrt{2})\left(\frac{5}{6}a\sqrt{2}\right)\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{50}{36}a^2 = 2a^2 + \frac{50}{36}a^2 - 2\left(\frac{5a^2\cdot 2}{6}\right)\cos\alpha$$

$$\cancel{\frac{50}{36}a^2} = \frac{72}{36}a^2 + \cancel{\frac{50}{36}}a^2 - \overset{1}{\cancel{2}}\,\frac{10a^2}{\underset{3}{\cancel{6}}}\cos\alpha$$

$$-2a^2 = -\frac{10}{3}a^2\cos\alpha \quad |\cdot 3$$

$$-6a^2 = -10a^2\cos\alpha \quad |:(-10)$$

$$\frac{6}{10} = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

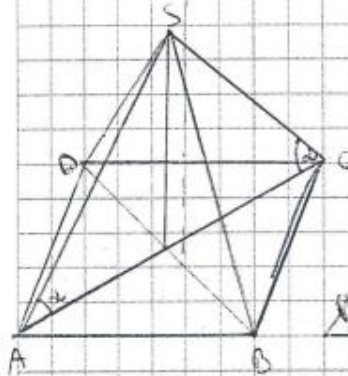
$\sin\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}}$ lub $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}}$

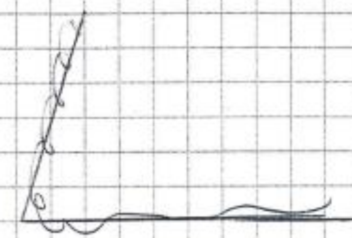
sprzeczne z założeniem

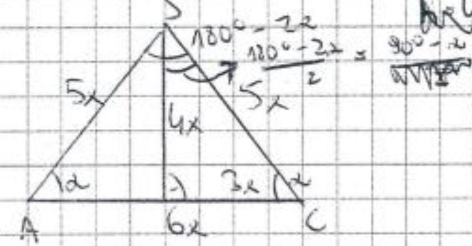
więc

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

odp.







$\frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

$h = 4x$

wysokość ostrosłupa

$\alpha = ?$

$$\frac{5x}{\sin\alpha} = \frac{6x}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

$$\sin\alpha = \frac{5\cancel{x}\sin(180^\circ - 2\alpha)}{6\cancel{x}} = \frac{5\sin(180 - 2\alpha)}{6}$$

$$\frac{4x}{\sin\alpha} = \frac{3x}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$\cancel{(6x)^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2\cdot 5x\cdot 5x\cdot\cos(180-2\alpha)}$$

$$\sin\alpha = \frac{4\cancel{x}\sin(90^\circ - \alpha)}{3\cancel{x}} = \frac{4\sin(90^\circ - \alpha)}{3}$$

$$\cancel{36x^2 = 50x^2 - 50x^2\cos(180-2\alpha)}$$

$$\cancel{\frac{-14x^2}{-50x^2} = \cos(180-2\alpha)}$$

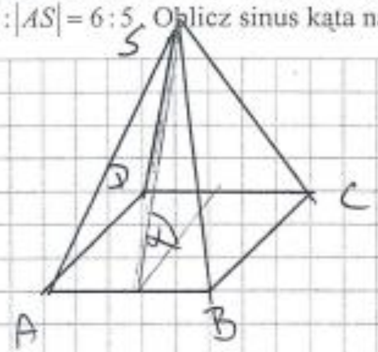
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

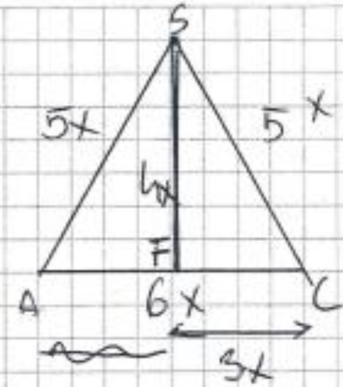
$\sin\alpha = \frac{4}{3}\cos\alpha$

$\cancel{\left(\frac{4}{3}\cos\alpha\right)^2 = 1}$

Zadanie 11. *(6 pkt)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.





$x > 0$

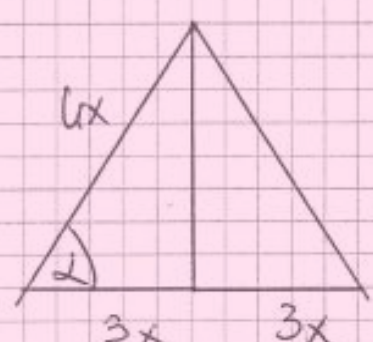
∡α znajduje się między ściana boczna a płaszczyzne podstawy

Z pitagorasa w trójkącie FCS, gdzie F to punkt rzutu wysokości na podstawę

$|SF| = 4x$

$a^2 = 25x^2 - 9x^2 = 16x^2$

$\cancel{a=\sqrt{16}}$ $a = 4x$ bo $x > 0$

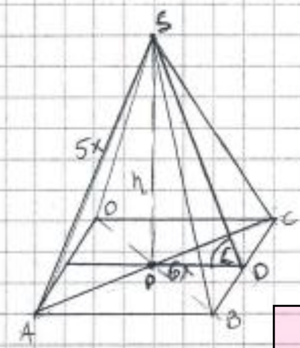


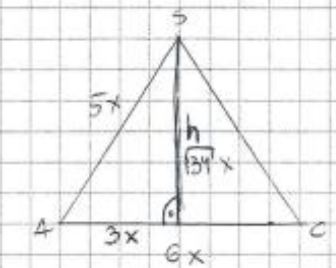
$\cos\alpha = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Zadanie 11. *(6 pkt)*

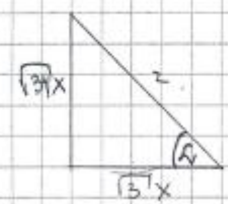
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.





$h^2 = 25x^2 + 9x^2$

$h^2 = 34x^2 \qquad h = \sqrt{34}\,x$



$a\sqrt{3} = 6x$

$a = \frac{6x}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}\,x}{3} = 2\sqrt{3}\,x$

$\frac{1}{2}a = \sqrt{3}\,x$

$z^2 = 34x^2 - 3x^2 \qquad z^2 = 31x^2$

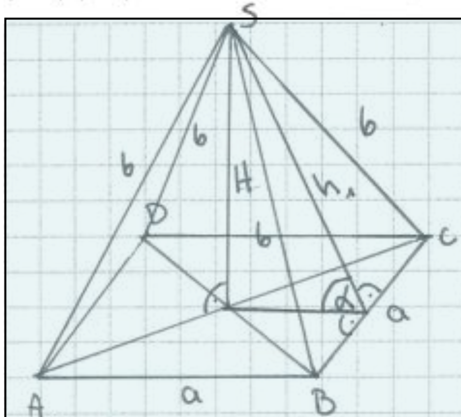
$z = \sqrt{31}$

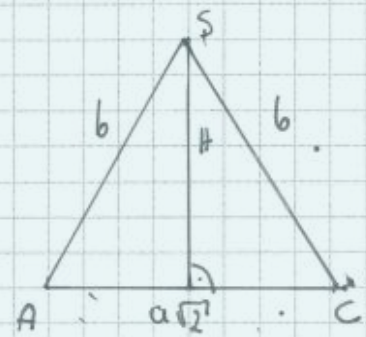
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{34}\,x}{\sqrt{31}\,x} = \sqrt{\frac{34}{31}} = \sqrt{1{,}0967} \approx \cancel{0{,}344}$ $0{,}308$

$\sin 0{,}308 = \underline{18^\circ}$

Zadanie 11. *(6 pkt)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.





$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{6}{5} = \frac{a\sqrt{2}}{b}$$

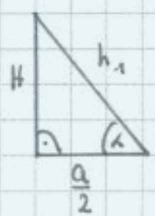
$|AC| = a\sqrt{2}$

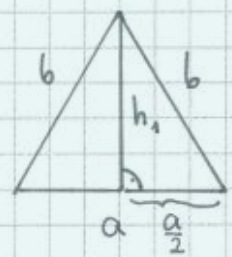
$|AS| = b$

Szukane:

$\sin\alpha = ?$

$\sin\alpha = \dfrac{H}{h_1}$





z tw. Pitagorasa

$h_1^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h_1^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$

z tw. Pitagorasa

$H^2 = h_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\sin\alpha = \frac{H}{h_1} = \frac{\sqrt{h_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{h_1} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \sqrt{\frac{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}{b^2 - \frac{a^2}{4}}} =$$

$b^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$b^2 = H^2 + \frac{2a^2}{4}$

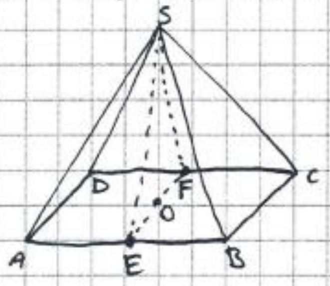
$b^2 = H^2 + \frac{a^2}{2}$

$$= \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)\cdot\boxed{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{4}{a^2}\right)}} = \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a^2} - \frac{a^2}{2b^2} + 2} =$$

$$= \sqrt{3 - \frac{4b^2}{a^2} - \frac{a^2}{2b^2}} = \sqrt{3 - \frac{3b^2\cdot 2b^2}{a^2\cdot 2b^2} - \frac{a^2\cdot a^2}{2b^2\cdot a^2}} =$$

$$= \sqrt{3 - \frac{5\cdot b^2 - 2a^2}{a^2\cdot 2b^2}} = \sqrt{\frac{3a^2\cdot 2b^2 - 5b^2 + 2a^2}{a^2\cdot 2b^2}} =$$

Podstawa to kwadrat.



Przyjmijmy jakieś jednostki.
Powiedzmy, że krawędź podstawy ma długość 1.

$|AC| = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu)

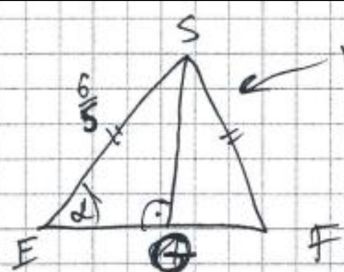
$|AE| = |EB|$

$|AS| = \frac{5\sqrt{2}}{6}$

$|DF| = |FC|$

Oczywistym jest, że skoro $\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{6}{5}$, to $\frac{|ES|}{|EF|} = \frac{6}{5}$, wodząc promieniem ~~od~~ zaczepionym w S od A do E skracamy go tak samo, jak skraca się |AC| do EF.

~~|EF|~~ $EF \parallel AD \parallel BC$, $|EF| = 1$



równoramienny troszkę niższy od równobocznego

$$\sin\alpha = \frac{|SG|}{|ES|}$$

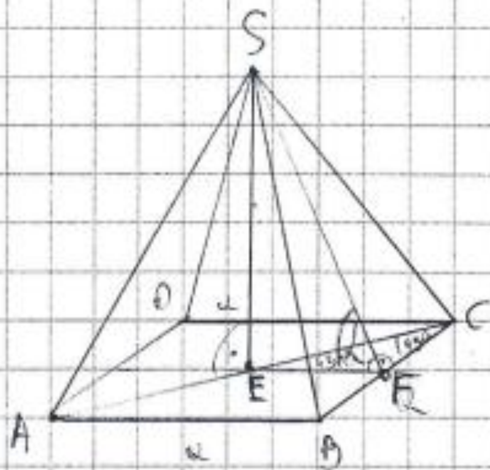
$$|SG| = \sqrt{(0{,}5)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\cancel{0{,}25}\ \frac{1}{4} + \frac{36}{25}} =$$

$$= \sqrt{1{,}69} = 1{,}3 = \frac{13}{10}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{13}{10}}{\frac{6}{5}} = \frac{\frac{13}{10}}{\frac{12}{10}} = \frac{13}{12}\ \#$$

Zadanie 11. *(6 pkt)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny *ABCDS* o podstawie *ABCD*. W trójkącie równoramiennym *ASC* stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.



$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{6}{5}$$

$$|AC| = \frac{6}{5}|AS| \qquad |AE| = |EC| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{6}{10}|AS|$$

$$\frac{6}{5}|AS| = a\sqrt{2} \qquad a = \frac{6|AS|}{5\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}|AS|}{10}$$

$$\cancel{|ES|^2 + \left(\frac{6}{10}|AS|\right)^2}$$

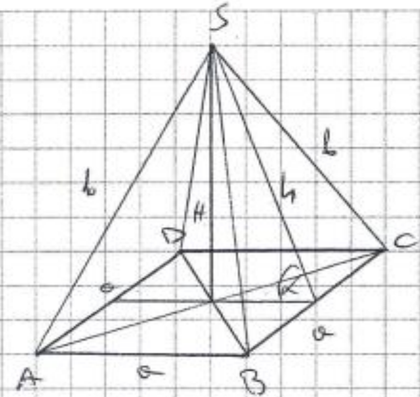
$$|EF| = \frac{1}{2}a = \frac{6\sqrt{2}|AS|}{20}$$

$$|ES^2| = \left(\left(\frac{6}{10}\right)|AS|\right)^2 + |AS|^2$$

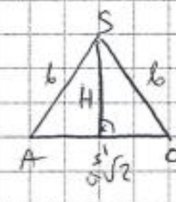
$$|ES|^2 = \frac{36}{100}|AS|^2 + |AS|^2$$

$$|ES| = \sqrt{\frac{136}{100}|AS^2|}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{6\sqrt{2}|AS|}{20}}{\sqrt{\frac{136}{100}|AS^2|}}$$



$\triangle ASC$ równoramienny



$\sin\alpha = ?$

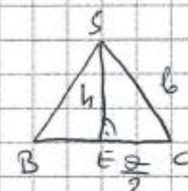
$|SS'| = H$

$|AC| = a\sqrt{2}$

$\frac{a\sqrt{2}}{b} = \frac{6}{5}$

$6b = 5a\sqrt{5}$

$b = \frac{5\sqrt{5}a}{6}$



$|SE| = h$

z tw. Pitagorasa:

$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}a}{6}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$

$h^2 = \frac{125a^2}{36} - \frac{a^2}{4}$

$h^2 = \frac{125a^2 - 9a^2}{36}$

$h^2 = \frac{116a^2}{36}$

z tw. Pitagorasa:

$H^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$H^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}a}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$H^2 = \frac{125a^2}{36} - \frac{a^2}{2}$

$H^2 = \frac{125a^2 - 18a^2}{36}$

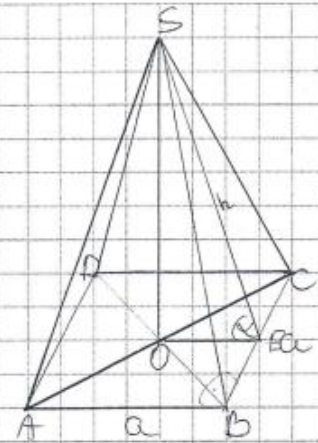
$H^2 = \frac{107a^2}{36}$

$\sin^2\alpha = \frac{H^2}{h^2}$

$\sin^2\alpha = \frac{107a^2}{\cancel{36}} \cdot \frac{\cancel{36}}{116a^2}$

$\sin^2\alpha = \frac{107}{116}$

$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{\frac{107}{116}}}$



$|AC| : |AS| = 6 : 5$

$|AC| = 6x$

$|AS| = 5x$

$|AC| = 6x$

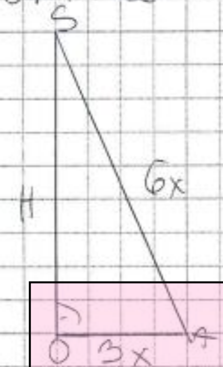
~~2a~~ z tw. Pitagorasa

$2a^2 = 6x$

$a^2 = 3x$

$a = \sqrt{3x}$

$|OE| = \frac{\sqrt{3x}}{2}$

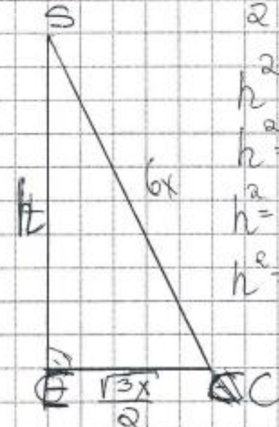


z tw. Pitagorasa

$H^2 = (6x)^2 - (3x)^2$

$H^2 = 36x^2 - 9x^2$

$H = 3\sqrt{3}\,x$



z tw. Pitagorasa

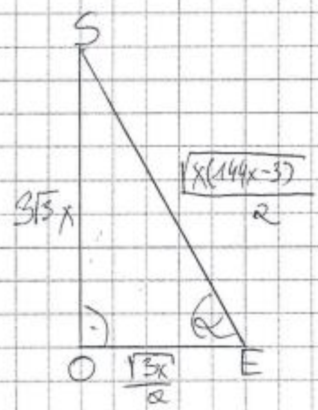
$h^2 = (6x)^2 - \left(\frac{\sqrt{3x}}{2}\right)^2$

$h^2 = 36x^2 - \frac{3x}{4}$

$h^2 = \frac{144x^2 - 3x}{4}$

$h^2 = \frac{x(144x-3)}{4}$

$h = \frac{\sqrt{x(144x-3)}}{2}$

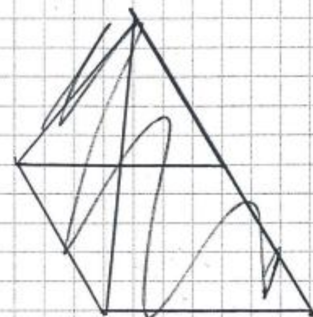


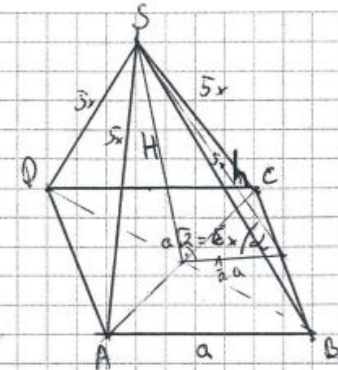
$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}\,x}{\frac{\sqrt{x(144x-3)}}{2}} = \frac{6x\sqrt{3}}{\sqrt{144x^2-3x}} =$

$= \frac{6x\sqrt{3}\cdot\sqrt{144x^2-3x}}{144x^2-3x} = \frac{6x\sqrt{432x^2-9x}}{144x^2-3x}$

Zadanie 11. *(6 pkt)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny *ABCDS* o podstawie *ABCD*. W trójkącie równoramiennym *ASC* stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.





a- krawędź podstawy

h- wysokość ściany bocznej

H- wysokość ostrosłupa

$a\sqrt{2} = 6x$

$a = \frac{6x}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}x}{2} = 3\sqrt{2}x$

$\frac{1}{2}a = \frac{3\sqrt{2}}{2}x$

$(5x)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2$

$25x^2 = \frac{1}{4}\cdot 9\cdot 2x^2 + h^2$

$h^2 = 25x^2 - \frac{9}{2}x^2$

$h^2 = \frac{50-9}{2}x^2$

$h^2 = \frac{41}{2}x^2$

$h = \sqrt{\frac{41}{2}}x = \frac{\sqrt{82}}{2}x$

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + H^2 = h^2$

$\frac{9}{2}x^2 + H^2 = \frac{41}{2}x^2$

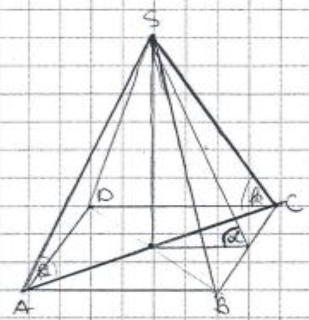
$H^2 = \frac{41-9}{2}x^2$

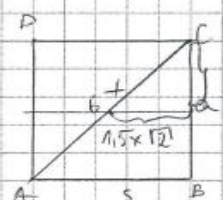
$H^2 = \frac{32}{2}x^2 = 16x^2$

$H = 4x$

$\sin\alpha = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4x}{\frac{3\sqrt{2}}{2}x} = \frac{4}{3\sqrt{2}}\cdot 2 = \frac{8\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\frac{AC}{AS} = \frac{6}{5}$





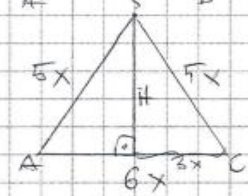
$6x = a\sqrt{2}$

$a = \frac{6x}{\sqrt{2}}$

$a = \frac{6x\sqrt{2}}{2}$

$a = 3x\sqrt{2}$

zakładam, że $a = 3\sqrt{2}$
x nie ma znaczenia
przy liczeniu sinusa.



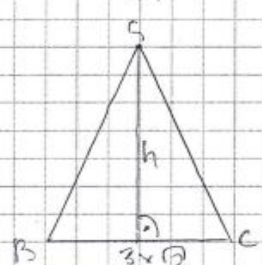
$\boxed{H^2 = (5x)^2 + (3x)^2}$

$H^2 = 25x^2 + \cancel{36}\,9x^2$

$H = \sqrt{25x^2 + 9x^2}$

$H^2 = 25 + 9$

$H = \sqrt{34}$



$\cancel{(\sqrt{25x^2+9x^2})^2 + (3x\sqrt{2})^2 = h^2}$

$\boxed{(\sqrt{34})^2 + (3\sqrt{2})^2 = h^2}$

$34 + 9 \cdot 2 = h^2$

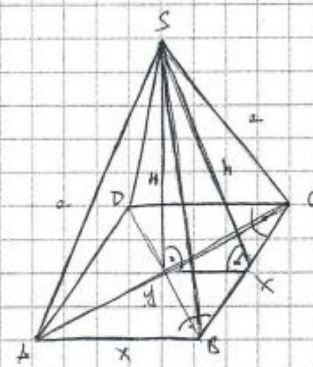
$52 = h^2$

$h = \sqrt{52}$

$\cancel{25x^2 + 9x^2 + 18x^2 = h^2}$

$\cancel{52x^2 = h^2}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{52}}{3\sqrt{2}} \qquad \sin\alpha = 3\sqrt{26}}$

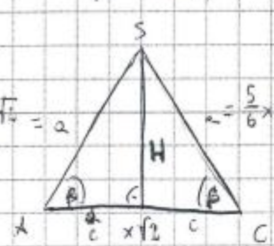


$x^2 + x^2 = y^2$

$y^2 = 2x^2$

$y = x\sqrt{2}$

$\frac{5}{6} x\sqrt{2} = a$

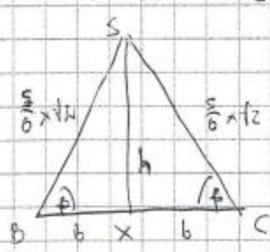


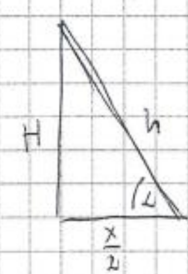
$a = \frac{5}{6} x\sqrt{2}$

$$\frac{x\sqrt{2}}{a} = \frac{6}{5}$$

$5x\sqrt{2} = 6a$

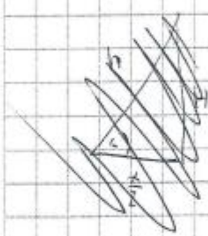
$a = \frac{5}{6} x\sqrt{2}$





$\sin\alpha = ?$

$\sin\alpha = \frac{H}{h}$



$$\begin{cases} H^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{6} x\sqrt{2}\right)^2 \\ h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{6} x\sqrt{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} H^2 + \frac{2x^2}{4} = \frac{25}{36} x \cdot 2 \\ h^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{25}{36} \cdot 2 \cdot x \end{cases}}$$

$$H^2 = \frac{50x}{36} - \frac{2x^2}{4} = \frac{50x}{36} - \frac{18x^2}{36} = \frac{50x - 18x^2}{36} \qquad H = \frac{\sqrt{50x - 18x^2}}{6}$$

$$h^2 = \frac{50x}{36} - \frac{x^2}{4} = \frac{50x}{36} - \frac{9x^2}{36} = \frac{50x - 9x^2}{36} \qquad h = \frac{\sqrt{50x - 9x^2}}{6}$$

$$\sin\alpha = \frac{H}{h} = \frac{(50x-18x^2)}{36} : \frac{(50x-9x^2)}{36} =$$

$$= \frac{(50x-18x^2)}{\cancel{36}} \cdot \frac{\cancel{36}}{(50x-9x^2)} = \frac{50x-18x^2}{50x-9x^2} = \frac{\cancel{x}(50-18x)}{\cancel{x}(50-9x)}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{50-18x}{50-9x}$$

$$\cos^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{2} : h \qquad \cos\alpha = \frac{x}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{50x-9x^2}} = \frac{6x}{2\sqrt{50x-9x^2}} \Big|^2$$

$$tg\,\alpha = H : \frac{x}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{36x^2}{4(50x-9x^2)}$$

$$\sin\alpha = \frac{H}{h} = \qquad \cos^2\alpha = \frac{36x^2}{200x-36x^2}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{50x-18x^2}}{\sqrt{50x-9x^2}}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{50x-18x^2}}{\sqrt{50x-9x^2}} \Big|^2$$

Odp.

$$\sin^2\alpha = \frac{50x-18x^2}{50x-9x^2}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{36x^2}{200x-36x^2} + \frac{50x-18x^2}{50x-9x^2} = 1$$

$$\frac{36x^2(50x-9x^2)+(50x-18x^2)(200x-36x^2)}{(200x-36x^2)(50x-9x^2)} = 1$$

$$1800x^3 - 324x^4 + 10000x^2 - 1800x^3 - 3600x^3 + 648x^4 = 10000x^2 - 1800x^3 - 1800x^3 + 324x^4$$

$$\cancel{324x^4} - 5400x^3 + 11800x^2 = \cancel{324x^4} - 3600x^3 + 10000x^2 \ \Big| + 3600x^3$$

$$1800x^3 + 1800x^2 = 0 \ \Big| : 1800 \qquad x^3 + x^2 = 0 \qquad x(x^2+x) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_1 \neq D$$

Zadanie 12. (3 punkty)	Standard V (ROZ)

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0{,}9$ i $P(B)=0{,}7$, to $P(A\cap B')\le 0{,}3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).

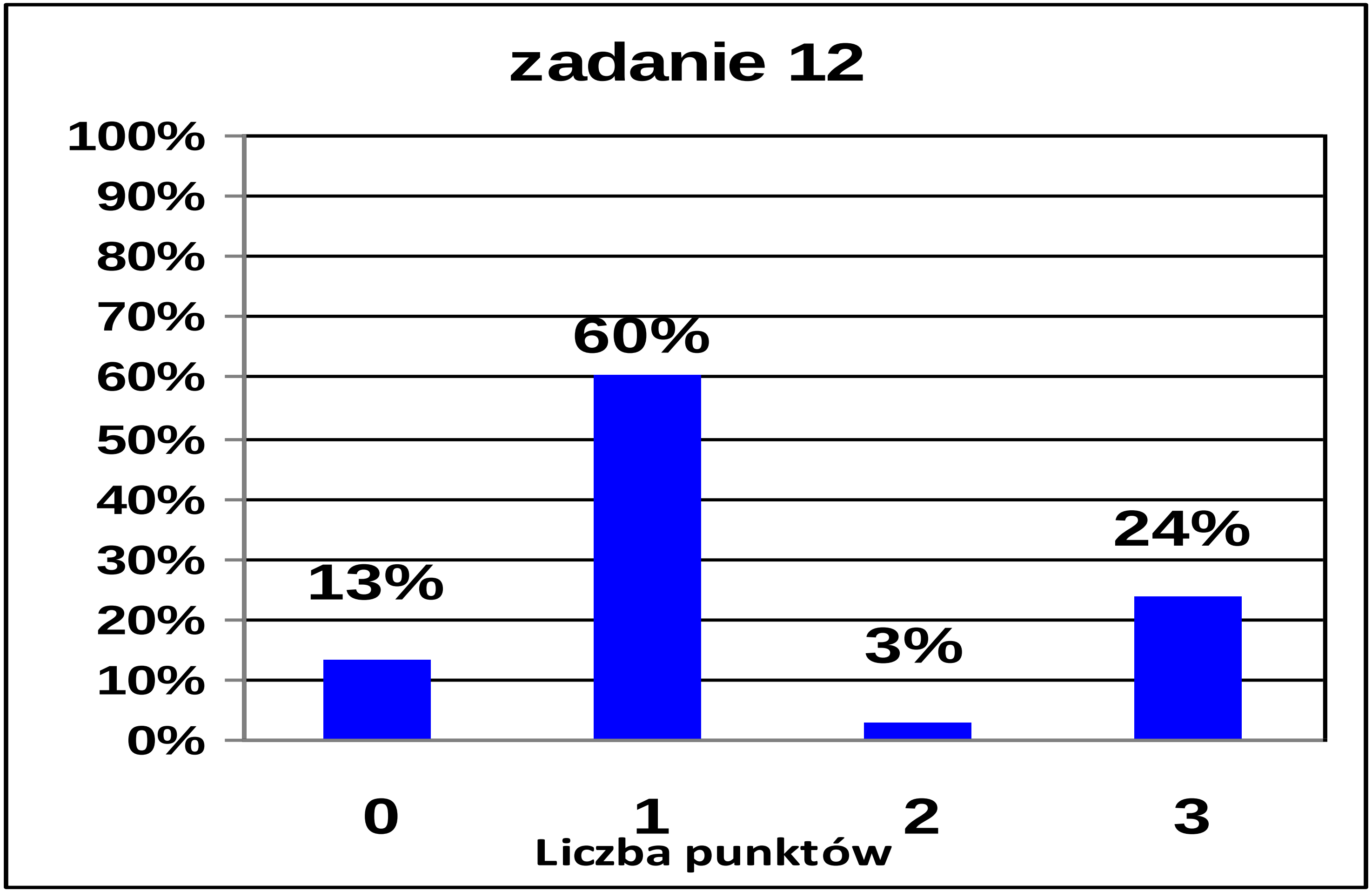
Zadanie **trudne**: ł=0,45

Opuszczenia: $f_{op}=4{,}5\%$

Pokonanie zasadniczych trudności tego zadania polegało na oszacowaniu prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń *A* i *B*, albo zapisaniu i wykorzystaniu zawierania się iloczynu zbiorów A i B` w zbiorze B`.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

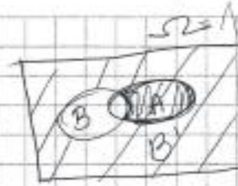
Rozkład uzyskanych punktów



Zadanie 12. *(3 pkt)*

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0,9$ i $P(B)=0,7$, to $P(A \cap B') \le 0,3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).

$P(A) = 0,9$
$P(B) = 0,7$



$B' =$

$P(A \cap B') \le 0,3$

$P(A \cap B') = P(A) - P(B) = 0,9 - 0,7 = 0,2 < 0,3$

$0,2 \le 0,3$

Odpowiedź: $P(A \cap B)' = 0,2$ $\quad 0,2 < 0,3$

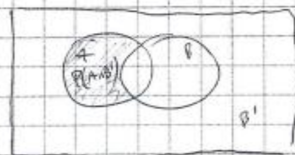
+ **Zadanie 12.** *(3 pkt)*

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,9$ i $P(B) = 0,7$, to $P(A \cap B') \le 0,3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).

$P(A) = 0,9$

$P(B) = 0,7$

$P(B') = 1 - P(B) = \underline{\underline{0,3}}$



$P(A \cap B') = -P(A \cap B) + P(A)$

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,63}$

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) =$

$= 0,9 - 0,63 = \underline{\underline{0,27}}$

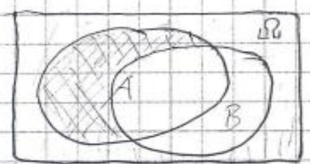
$L = P(A \cap B') = 0,9 \cdot 0,3 = \underline{\underline{0,27}} \le 0,3 = P$

$\underline{\underline{L < P}}$ cbdu.

Odpowiedź: $P(A \cap B') = 0,27$ co jest mniejsze 0,3 czyli spełnia nierówność.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,9$ i $P(B) = 0,7$, to $P(A \cap B') \leq 0,3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).



$P(B) = 0,7 \Rightarrow P(B') = 1 - 0,7 = 0,3$

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do B (B') wynosi 0,3. Zatem część wspólna P(A) i P(B') może być równa 0,3 – – w wypadku gdy $P(B') \subset P(A)$ lub być mniejsza od 0,3, gdy P(B') nie zawiera się całkowicie w zbiorze P(A).

~~$P(A \cap B) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$~~

~~$P(A \cap B') \leq 0,3$~~

$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = 0,9 \cdot 0,3 = 0,27 \leq 0,3$ c.n.d.

Odpowiedź: Wykazane powyżej.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0{,}9$ i $P(B)=0{,}7$, to $P(A\cap B')\le 0{,}3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).

$P(A)=0{,}9 \quad P(A')=1-P(A)=0{,}1$

$P(B)=0{,}7$

$P(B')=1-P(B)=1-0{,}7=0{,}3$

	$P(A)$	$P(A')$
$P(B)$	a	b
$P(B')$	c	d

$P(A\cap B')=c$

$\cancel{P(A\cup B)=0{,}9+0{,}7-P(A\cap B)}$

$\cancel{P(A\cup B)=0{,}9+0{,}7-a=1{,}6-a}$

$\cancel{P(A\cup B')=0{,}9+0{,}3-P(A\cap B')}$

$\cancel{P(A-P(B)=b+c+d}$

$\cancel{0{,}2=b+c+d}$

$\cancel{P(B)-P(A')=a+b+d}$

$\cancel{0{,}6=a+b+d}$

$P(A)=0{,}9=a+c \longrightarrow c=0{,}9-a$

$P(B)=0{,}7=a+b$

$P(B')=0{,}3=c+d$

$P(A')=0{,}1=b+d$

$P(A\cap B')=c=0{,}9-a$

$P(A)-P(B')=a=0{,}9-0{,}3=0{,}6$

$P(A\cap B')=0{,}9-0{,}6=0{,}3$

$0{,}3\le 0{,}3 \quad$ c.n.d

$P(A \cap B) =$

$P(A) = 0.9$

$P(B) = 0.7$

$P(A \cap B') \leq 0.3$

$P(A \cup B') \leq P(A')$

$P(B') = 1 - P(B)$

$P(B') = 1 - 0{,}7 = 0.3$

$\cancel{P(A \cap B')} = \cancel{P(B') \cup P(A \cup B)\; P(A) - P(A \cap B)}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 1.6 - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$\cancel{P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)}$$

$$\cancel{P(A \cap B') + P(B) \leq P(A) + P(B)}$$

$$\cancel{P(A \cap B') \leq 0.9}$$

$$1.6 - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$
$$1.6 - P(A \cap B) \leq 1.6$$
$$P(A \cap B) \geq 0$$

$$\boxed{P(A \cap B') = P(B') + P(A \cap B)}$$

$$P(A \cap B') = 0.3 + P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.3 - P(A \cap B')$$

$$-P(A \cap B') + 0.3 \geq 0$$
$$P(A \cap B') \leq 0.3$$

C.N.D.

$\cancel{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

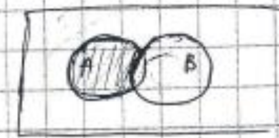
$\cancel{P(A \cap B') = P(B) + P(B') - P(A \cap B)}$

Zadanie 12. *(3 pkt)*

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0{,}9$ i $P(B)=0{,}7$, to $P(A\cap B')\leq 0{,}3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).

$P(B') = 1 - P(B)$

$P(B') = 0{,}3$



$\cancel{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$

$\cancel{P(A\cap B') = P(A) + P(B') - P(A\cup B')}$

$\cancel{P(A\cap B') = 0{,}8 + 0{,}3 - P(A\cup B')}$

$\cancel{P(A\cup B') \leq P(A) + P(B')}$

$\cancel{P(A\cup B') \leq 1{,}2}$

$P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$

$P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$

$\cancel{P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)}$

$\cancel{P(A\cap B) = 1{,}6 - P(A\cup B)}$

$P(A\cup B) = 1{,}6 - P(A\cap B)$

$P(A\cap B') = 0{,}8 - P(A\cup B)$

$0{,}8 - P(A\cup B) \leq 0{,}3$

$0{,}6 \leq P(A\cup B)$

$0{,}6 \leq P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$0{,}6 \leq 1{,}6 - P(A\cap B)$

$P(A\cap B) \leq 1$

Zadanie 12. *(3 pkt)*

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0{,}9$ i $P(B)=0{,}7$, to $P(A\cap B')\le 0{,}3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).

$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P(A\cup B') = P(A) + P(B') - P(A\cap B')$

$\cancel{P(A\cap B') = P(A) + P(B') - P(A\cup B') \le 0{,}3}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$1 \le 0{,}9 + 0{,}7 - P(A\cap B)$

$-P(A\cap B) \ge -0{,}3$

$P(A\cap B) \le 0{,}3$

$P(A\cap B) = P(A\cap B') \le 0{,}3$

Odpowiedź: ....

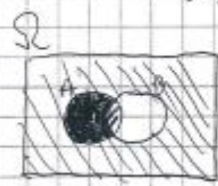
Zadanie 12. *(3 pkt)*

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0{,}9$ i $P(B)=0{,}7$, to $P(A\cap B')\le 0{,}3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).

$P(A)=0{,}9 \qquad P(B)=0{,}7$

$P(A\cap B')\le 0{,}3$

$P(B')=1-P(B)=0{,}3$



$P(A\cup B)-P(B)=P(A\cap B')$

~~[illegible]~~

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=0{,}9+0{,}7-\cancel{6}P(A\cap B)=1{,}6-P(A\cap B)$

$P(A\cap B')=1{,}6-P(A\cap B)-0{,}7=$

$=0{,}9-P(A\cap B)$

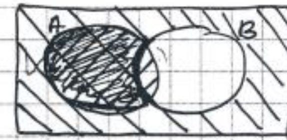
$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=0{,}9-P(A\cap B)$

$P(A')=1-0{,}9=0{,}1$

Jeżeli $P(A')$ jest równe 0,1 to oznacza, że $P(A\cap B)$ musi być znacznie większa od 0,1 ponieważ w 0,1 zawiera się ~~P(A P(B)~~ $P(B)/P(A)$.
W związku z tym $P(A\cap B')$ na pewno będzie mniejsza ~~od~~ bądź równa 0,3 ponieważ nawet gdyby $P(B)/P(A)$ było 0,1 to ~~w tak tak~~ wtedy $0{,}9-P(A\cap B)=0{,}3$.

Odpowiedź: ....

$P(A) = 0{,}9 \quad P(B) = 0{,}7$



$P(B') = 1 - P(B) =$
$= 0{,}3$

$\cancel{P(A \cap B') = P(B') - P(A \cap B)}$

$\cancel{P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)}$

$\cancel{P(A \cap B') = 0{,}9 - P(A \cap B)}$

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$\cancel{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$\cancel{P(A \cup B) = 0{,}9 + 0{,}7 - P(A \cap B)}$

$\cancel{P(A \cup B) = 1{,}6 - P(A \cap B)}$

$\cancel{P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)}$

$\cancel{P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')}$

$\cancel{P(A \cup B') = 0{,}9 + 0{,}3 - P(A \cap B')}$

$\cancel{P(A \cup B') = 1{,}2 - P(A \cap B')}$

$\cancel{P(A \cap B') = 0{,}9 - P(A \cap B)}$

$\cancel{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$\cancel{P(A \cup B) = 1{,}6 - P(A \cap B)}$

$\cancel{P(A \cap B) = 1{,}6 - P(A \cup B)}$

$\cancel{P(A \cap B') = 0{,}9 - 1{,}6 - P(A \cup B)}$

$\cancel{P(A \cap B') = -0{,}7 - P(A \cup B)}$

$\cancel{P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)}$

$\cancel{P(A \cup B) \leq 1{,}6}$

$\cancel{P(A \cap B') = 0{,}9 - P(A \cap B)}$

$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$

$P(A \cup B') = 1{,}2 - P(A \cap B')$

$P(A \cap B') = 1{,}2 - P(A \cup B') \qquad P(A \cup B') \geq P(A)$

$P(A \cup B') \geq 0{,}9$

$1{,}2 - 0{,}9 = 0{,}3$

$\Downarrow$

$P(A \cap B') \leq 0{,}3$

Odpowiedź: ....

$a_n = a_1 \cdot 27^{n-1}$
$3^{x_n} = a_1 \cdot 27^{n-1}$
$3^{x_n} = 3$

BRUDNOPIS

$k^6 - 2k^4 + k^2$
$k^2 = t,\ t > 0$
$t^3 - 2t^2 + t = 0$
$t^3 - t^2 - t^2 + t = 0$
$t^2(t-1) - (t^2-1) = 0$
$t^2(t-1) - (t-1)(t+1) = 0$
$(t-1)(t^2-t-1) = 0$
$t = 1$
$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$
$k^2 = -1$
$k = 1$

$\frac{a(b-c) + b(a-c)}{(a-c)(b-c)} = 2$
$a(b-c) + b(a-c) = 2(a-c)(b-c)$
$ab - ac + ab - ac = 2ab - 2ac - 2bc + 2c^2$
$2ab - 2ac = 2ab - 2ac - 2bc + 2c^2$
$0 = 2c^2 - 2bc$
$2bc = 2c^2$
$b = c$

$P(A) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$P(A) - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$
$-P(B) + P(A \cup B)$
$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
$P(A \cup B) \leq 1{,}6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$
$P(B') = 0{,}3$
$P(A \cup B) = 1{,}2 - P(A \cap B')$
$P(A \cap B') = 1{,}2 - P(A \cup B)$
$P(A \cup B) \leq \cancel{P(A) + B}$

$a_n = 3^{x_n}$

$\log_3 a_n^{x_n}$

$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$
$P(A \cup B') = 0{,}9 + 0{,}3 - P(A \cap B')$
$P(A \cup B') = 1{,}2 - P(A \cap B')$
$P(A \cap B') = 1{,}2 - P(A \cup B')$

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
$P(A \cup B) \leq 1{,}6$
$P(A \cup B) = 1{,}6 - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = 1{,}6 - P(A \cup B)$
$P(A \cap B') = 0{,}9 - 1{,}6 + P(A \cup B)$
$P(A \cap B') = -0{,}7 + P(A \cup B)$

$P(A \cup B) - 1{,}6 = -P(A \cap B)$
$1{,}6 - P(A \cup B) = P(A \cap B)$
$0{,}9 - 1{,}6 + P(A \cup B) =$
$= -0{,}7 + P(A \cup B)$
$0{,}9 - P(A \cap B) = 1{,}2 - P(A \cup B')$

$P(A \cap B') = 1{,}2 - P(A \cup B')$ $P(A \cup B') - P(A \cap B) = 0{,}3$
$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$
$P(A \cap B') = P(A) + P(B') - P(A \cup B')$
$P(A \cap B') = 1{,}2 - P(A \cup B')$
$P(A \cup B') \leq P(A) + P(B')$
$P(A \cup B') \leq 1{,}2$

2 2 3 3 3 | 7 · 7 · 7
7^3

$3^{x_n} = a_1 \cdot 27^{n-1}$
$\frac{3^{x_n}}{3^{3n-3}} = a_1$
$a_1 = 3^{x_n - 3n + 3}$

$a_n = 3^{x_n}$ $q = 27$
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
27^{n-1}

BRUDNOPIS

$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c}$

$\frac{c}{a-c} + \frac{c}{b-c} = 0 \quad /:c$

$\frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} = 0$

$\frac{a-c+c}{a-c} + \frac{b-c+c}{b-c} = 1 + \frac{c}{a-c} + 1 + \frac{c}{b-c} = 2$

$\frac{b-c}{a-c} + \frac{a-c}{b-c} = 0$

$\frac{b-c}{a-c} = -\frac{a-c}{b-c}$

$(b-c)^2 = -(a-c)^2$

$\cancel{b^2 - 2bc + c^2 = a^2 - 2ac + c^2}$

$\cancel{b^2}$

$b^2 -$

x y z

NIE SPRAWDZAĆ MI BRUDNOPISU! :-)

Dziękuję za uwagę.

Bardzo.