Spis treści

Wstęp

W roku szkolnym 2009/2010 odbyły się X Radomskie Zawody Matematyczne.
Prezentujemy zestawy zadań wraz z rozwiązaniami przygotowane na I i II etap zawodów.
Uczniowie szkół podstawowych rozwiązywali jeden zestaw zadań.
Dla uczniów gimnazjów przygotowano dwa zestawy. Jeden dla uczniów, którzy realizują program nauczania matematyki w wymiarze 12-14 godzin w całym cyklu kształcenia, a drugi dla uczniów, którzy realizują program nauczania matematyki w zwiększonym wymiarze godzin (15 i więcej) w całym cyklu kształcenia.
Podobnie uczniowie szkół pogimnazjalnych realizujący program nauczania matematyki w zakresie podstawowym mieli inny zestaw zadań niż uczniowie realizujący program nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym.
Zadania wybrano z ogólnie dostępnych podręczników szkolnych oraz zbiorów zadań.
Poniższy materiał opracował zespół, który przygotował i przeprowadził X Radomskie Zawody Matematyczne:

Piotr Darmas – RODoN, RO SNM, IV LO,
Dorota Kucharczyk – RO SNM, PG nr 1,
Beata Łuczaj – RO SNM, ZS Samochodowych,
Danuta Pardela - RO SNM, ZS Samochodowych,
Beata Rybińska – RO SNM, PSP nr 23,
Małgorzata Sokołowska – RO SNM, IV LO,
Lidia Wojdała - RO SNM, ZS Samochodowych.

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

ZADANIA NA I ETAP

SZKOŁA PODSTAWOWA

Zadanie 1

W trójkącie ABC o obwodzie 50 cm poprowadzono wysokość CD, która podzieliła go na dwa trójkąty. Wyznacz długość wysokości CD, jeżeli obwód trójkąta ADC jest równy 30cm, a trójkąta BDC 36 cm.

Zadanie 2

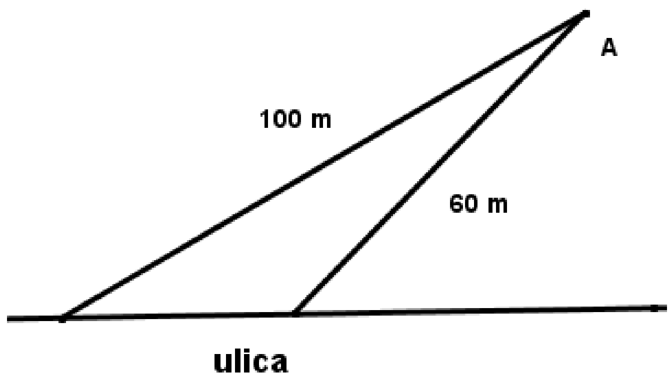
Marcin kupił 4,5 kg owoców. Gdyby cena owoców była o 0,20 zł niższa, to za tą sama kwotę pieniędzy mógłby kupić o 1,2 kg owoców więcej. Jaka jest cena owoców?

Zadanie 3

Sprawdź, która z liczb jest większa?

$\frac{1}{2008} + \frac{1}{2011}$ *czy* $\frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}$

Zadanie 4



Na ogrodzenie trójkątnej działki o powierzchni 14 arów, której plan przedstawiono na rysunku, potrzeba 230 m siatki (nie uwzględniamy otworu na bramę). Pan Marek stoi w punkcie A. W jakiej odległości od ulicy się znajduje?

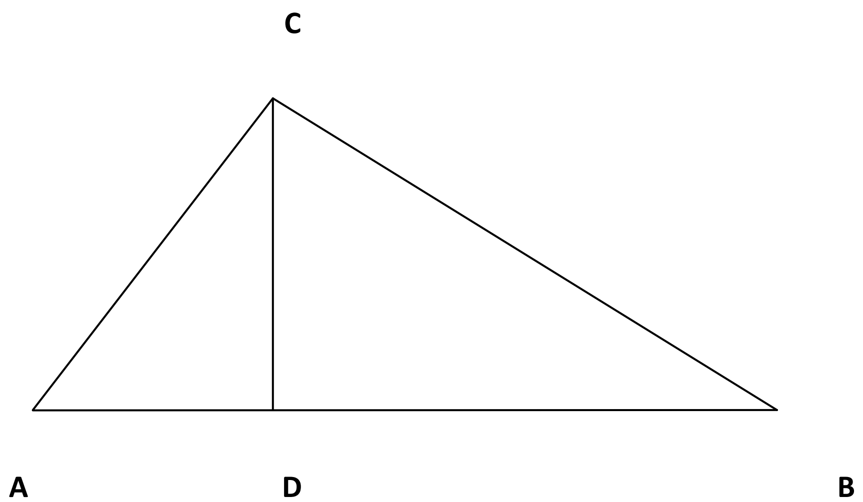
Zadanie 5

Dana jest liczba dwucyfrowa. Wiadomo, że liczba trzycyfrowa otrzymana z danej liczby przez dopisanie po prawej stronie cyfry 5 jest od niej większa o 293. Jaka to liczba?

Rozwiązania zadań

I etap szkoła podstawowa

Zadanie 1



Zauważamy, że różnica sumy obwodów trójkątów ADC i BDC i obwodu trójkąta ABC jest równa dwóm wysokościom CD.

AC + BC + AD = 50cm   i AD + BD = AB

AC + AD + DC = 30cm i CD + BD + CB = 36cm

czyli

AC + CD + AD + BD + CD + BC = 66cm

AC + AB + BC + 2CD = 66cm

50 + 2 CD = 66cm

2CD = 16cm

CD = 8cm

Odpowiedź: Wysokość CD ma 8 cm długości.

Zadanie 2

I sposób

Obliczamy ile pieniędzy mniej zapłaciłby Marcin gdyby kupił 4,5 kg owoców w cenie o 0,20 zł mniejszej:

4,5 kg · 0,20zł/kg = 0,9 zł

Obliczamy niższą cenę:

0,9 zł : 1,2kg =0,75zł/kg

Wyznaczamy szukaną cenę:

0,75 zł + 0,2 zł = 0,95 zł

II sposób

x: cena owoców

Układamy równanie:

$4{,}5x = (4{,}5 + 1{,}2) \cdot (x - 0{,}2)$

Rozwiązujemy równanie:

$x = 0{,}95$

Odpowiedź: Cena owoców wynosi 0,95 zł za 1 kg.

Zadanie 3

$$\frac{1}{2008} + \frac{1}{2011} = \frac{2011}{2008 \cdot 2011} + \frac{2008}{2008 \cdot 2011} = \frac{4019}{2008 \cdot 2011}$$

$$\frac{1}{2009} + \frac{1}{2010} = \frac{2010}{2009 \cdot 2010} + \frac{2009}{2009 \cdot 2010} = \frac{4019}{2009 \cdot 2010}$$

Liczniki tych ułamków są takie same, a zatem należy porównać mianowniki.

Porównujemy mianowniki:

I sposób

$$2008 \cdot 2011 = 2008 \cdot (2010 + 1) = 2008 \cdot 2010 + 2008$$

$$2009 \cdot 2010 = (2008 + 1) \cdot 2010 = 2008 \cdot 2010 + 2010 = (2008 \cdot 2010 + 2008) + 2$$

II sposób

$$\begin{array}{r} 2011 \\ \times 2008 \\ \hline 16088 \\ +4022 \\ \hline 4038088 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2009 \\ \times \quad 2010 \\ \hline 2009 \\ +4018 \\ \hline 4038090 \end{array}$$

zatem

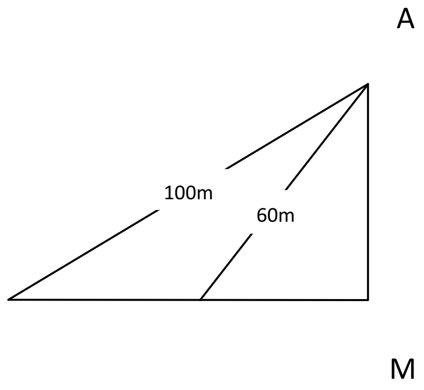
$2008 \cdot 2011 < 2009 \cdot 2010$ (4038088 < 4038090)

Porównujemy ułamki:

$\frac{4019}{2008 \cdot 2011} > \frac{4019}{2009 \cdot 2010}$ czyli $\frac{1}{2008} + \frac{1}{2011} > \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}$

Zadanie 4

Uzupełniamy rysunek o odcinek AM reprezentujący odległość pana Marka od ulicy.



Obliczamy brakującą długość boku trójkąta:

230m – (100m + 60m) = 70m

Zamieniamy ary na m^2:

14 arów = 1400 m^2

Zapisujemy równanie umożliwiającego wyznaczenie szukanego odcinka.

$\frac{1}{2}$ AM · 70m = 1400m^2

Obliczamy długość odcinka AM

AM = 40m

Odpowiedź: Pan Marek znajduje się w odległości 40 m od ulicy.

Zadanie 5

I sposób

a – cyfra dziesiątek szukanej liczby

b – cyfra jedności szukanej liczby

a b 5	5 – b = 3	lub	15 – b = 3
- a b	b = 5 – 3		b = 15 – 3
2 9 3	b = 2		b = 12

nie spełnia warunków zadania (12 nie jest cyfrą)

b = 2

a 2 5	2 – a = 9	lub	12 – a = 9
- a 2	a= 2 – 9		a = 12 – 9
2 9 3	a = -7		a = 3

nie spełnia warunków zadania (-7 nie jest cyfrą)

a = 3

Sprawdzenie: 325 – 32 = 293

II sposób

a: cyfra dziesiątek szukanej liczby

b: cyfra jedności szukanej liczby

10a + b: postać liczby dwucyfrowej

Układamy równanie:

$100a + 10b + 5 = 10a + b + 293$

Doprowadzamy równanie do postaci:

$10a + b = 32$

Odpowiedź: Szukana liczba to 32.

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

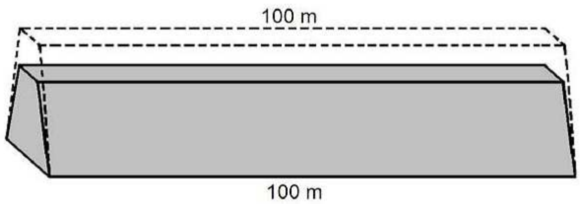
ZADANIA NA I ETAP

GIMNAZJUM

WERSJA A (ŁATWIEJSZA)

Zadanie 1

Suma obwodów przedniego i tylnego koła parowozu wynosi 9 m. Jedno z nich na drodze 60 m robi tyle obrotów, ile drugie koło na drodze 75 m. Wyznacz obwody tych kół. Jaką średnicę ma większe koło, wynik podaj z dokładnością do 1mm (przyjmij $\pi \approx \frac{22}{7}$)



Zadanie 2

Przekrój poprzeczny ziemnego wału przeciwpowodziowego ma mieć kształt trapezu równoramiennego o podstawach długości 6 m i 16 m oraz wysokości 12 m. Trzeba jednak usypać wyższy wał, bo przez dwa lata ziemia osiądzie i wysokość wału zmniejszy się o 20% (szerokość wału u podnóża i na szczycie nie zmienia się). Po zakończeniu osiadania ziemi, w celu zmniejszenia przesiąkania, na zboczu wału od strony wody zostanie ułożona warstwa gliny.

Oblicz, ile metrów sześciennych ziemi trzeba przywieźć na usypanie 100-metrowego odcinka ziemnego wału przeciwpowodziowego?

Oblicz pole powierzchni, którą trzeba będzie wyłożyć gliną na 100-metrowym odcinku tego wału.

Zadanie 3

Kasjer poukładał w n - paczkach po k – banknotów. Gdyby do każdej paczki włożył o 2 banknoty więcej – byłoby dokładnie o 3 paczki mniej, gdyby natomiast dawał o 5 banknotów mniej – musiałby zrobić o 11 paczek więcej. Ile było wszystkich pieniędzy, jeżeli każdy banknot miał nominał 20 zł.

Zadanie 4

Jeżeli 100 podzielimy przez **p,** to otrzymamy **m** i resztę 6**.** Oblicz **p** i **m.**

Zadanie 5

Do dwóch okręgów $o_1(O_1, r_1)$ i $o_2(O_2, r_2)$ stycznych zewnętrznie w punkcie A poprowadzono wspólną styczną BC, gdzie B i C są punktami styczności , B ≠ A i C ≠ A.

Wykaż, że kąt BAC jest prosty.

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

ZADANIA NA I ETAP

GIMNAZJUM

WERSJA B (TRUDNIEJSZA)

Zadanie 1

Ciężar stopu miedzi i cynku wynosi 24 kg. Po zanurzeniu w wodzie stop ten traci na wadze $2\frac{8}{9}$ kg. Znaleźć ciężar miedzi i cynku w tym stopie, jeżeli wiadomo, że miedź traci na ciężarze przy zanurzeniu w wodzie $11\frac{1}{9}\%$, a cynk $14\frac{2}{7}\%$ swojego ciężaru.

Zadanie 2

Znajdź liczbę dwucyfrową o sumie cyfr 7, taką, że pomnożona przez liczbę otrzymaną przez przestawienie cyfr daje 1300.

Zadanie 3

Dla jakich wartości parametru ***a*** wartość liczbowa wyrażenia $\frac{a}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3}$ jest liczbą wymierną?

Zadanie 4

Trójkąt o bokach 4, 6, 8 podzielono prostą równoległą do najdłuższego boku na dwie części o równych polach. Oblicz długości boków otrzymanych figur.

Zadanie 5

Na boku AB kwadratu ABCD zbudowano trójkąt równoboczny ABE. Oblicz miarę kąta DEC.

Rozwiązania zadań

I etap gimnazjum wersja A

Zadanie 1

Rozwiązujemy zadanie za pomocą układu równań.

x: odwód większego koła

y: obwód mniejszego koła

Zauważamy, że przy tej samej ilości obrotów większe koło pokona dłuższą drogę.

$\frac{60}{y}$: tyle obrotów wykona mniejsze koło na drodze 60 m

$\frac{75}{x}$: tyle obrotów wykona większe koło na drodze 75 m

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ \frac{60}{y} = \frac{75}{x} \quad | \cdot xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 60x = 75y \quad |: 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 - y \\ 4x = 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

D – średnica większego koła

$\pi D = 5$

$\frac{22}{7} D = 5$

$D = \frac{35}{22}m$

$D = \frac{35}{22}m = 1{,}5909(09)m = 1590{,}9(09)mm \approx 1591mm$

Odpowiedź:

Większe koło ma obwód 5 m, a mniejsze 4 m, a średnica większego koła wynosi około 1591

Zadanie 2

Obliczamy wysokość wału, który trzeba usypać aby po procesie osiadania miał on wysokość 12m.

h: początkowa wysokość wału (wysokość trapezu)

0,2h: o tyle zmniejszy się wysokość wału

h – 0,2h = 12

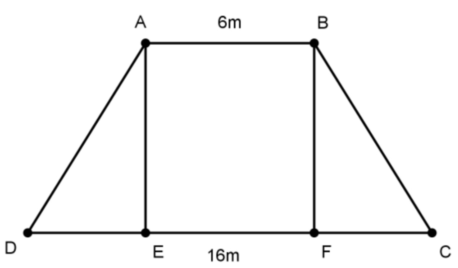
0,8h = 12

h = 15m

Obliczamy objętość wału. Należy zauważyć, że jest to graniastosłup prosty, czworokątny o podstawie trapezu.

$P_p = \frac{1}{2}(6+16) \cdot 15 \qquad P_p = 165m^2$

$V = P_p H$ gdzie H = 100m $\quad V = 165m^2 \cdot 100m = 16\,500m^3$



Wyznaczamy długość BC ramienia trapezu:

BF = 12m

FC =(16m - 6m) : 2 = 5m

ΔBFC prostokatny, stosujemy twierdzenie Pitagorasa

$12^{2}+5^{2} = BC^{2}$

BC = 13m

$13m \cdot 100m = 1300m^{2}$

Odpowiedź:

Na usypanie 100 m odcinka wału trzeba przywieźć 16 500m^3 ziemi, a glina trzeba wyłożyć powierzchnię 13 000 m^2.

Zadanie 3

Należy zauważyć, że nie zmienia się łączna ilość banknotów

I sytuacja :	*II sytuacja:*	*III sytuacja:*
n- ilość paczek, k – ilość banknotów w paczce nk – ilość banknotów	(k + 2) – ilość banknotów w paczce (n - 3) – ilość paczek (n – 3)(k + 2) – ilość banknotów	(k – 5) – ilość banknotów w paczce (n + 11) – ilość paczek (n +11)(k – 5) – ilość banknotów

Układamy układ równań: $\begin{cases} nk = (n-3)(k+2) \\ nk = (n+11)(k-5) \end{cases}$

$$\begin{cases} nk = nk + 2n - 3k - 6 \\ nk = nk - 5n + 11k - 55 \end{cases}$$

Otrzymujemy: $$\begin{cases} 2n - 3k = 6 \\ -5n + 11k = 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 33 \\ k = 20 \end{cases}$$

Obliczamy ilość banknotów $nk = 660$

Obliczamy kwotę pieniędzy $660 \cdot 20zł = 13\,200zł$

Odpowiedź: Wszystkich pieniędzy było 13 200 zł.

Zadanie 4

Założenia:

100:p = m reszty 6 i $p,m \in N$

Jeżeli reszta z dzielenia jest równa 6, to dzielnik musi być większy od 6, zatem p>6

pm + 6 = 100

pm = 94

Należy wyznaczyć rozwiązanie tego równania w liczbach naturalnych.

Liczbę 94 można przedstawić jako iloczyn liczb naturalnych tylko na dwa sposoby:

I sposób

94 = 1 · 94

stąd p = 1, m = 94 , co nie spełnia warunków zadania (p>6)

lub p = 94, m = 1

II sposób

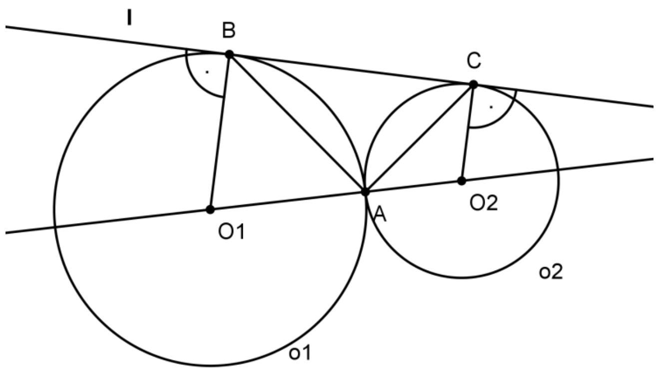
94 = 2 · 47

stąd p = 2, m = 47, co nie spełnia warunków zadania (p>6)

lub p = 47, m = 2

Odpowiedź : Zadanie ma dwa rozwiązania p = 94 ; m = 1 lub p = 47 i m = 2

Zadanie 5



Założenie:

Okręgi $o_1(O_1, r_1)$ i $o_2(O_2, r_2)$ styczne zewnętrznie w punkcie A

Prosta l styczna do okręgów o_1 i o_2 w punktach B i C

Teza:

$\sphericalangle BAC = 90^\circ$

Prosta l styczna do okręgów o_1 i o_2 zatem $\sphericalangle O_1BC = 90^\circ$ i $\sphericalangle O_2CB = 90^\circ$ (kąt między styczną i promieniami poprowadzonymi do punktów styczności)

$O_1B = O_1A = r_1 \Rightarrow \Delta BO_1A$ jest równoramienny ,zatem $\sphericalangle O_1BA = \sphericalangle O_1AB = \alpha$
$O_2C = O_2A = r_2 \Rightarrow \Delta CO_2A$ jest równoramienny ,zatem $\sphericalangle O_2CA = \sphericalangle O_2AC = \beta$

Stąd $\sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha$ i $\sphericalangle ACB = 90^\circ - \beta$

Z twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych w trójkącie BAC otrzymujemy:

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = 180^\circ$

$90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta + \sphericalangle BAC = 180^\circ$
$\sphericalangle BAC = \alpha + \beta$

Punkty O_1, A i O_2 są współliniowe, bo okręgi styczne zewnętrznie, zatem

$$\sphericalangle O_1AB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAO_2 = 180^\circ$$
$$\sphericalangle BAC + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$
$$2\sphericalangle BAC = 180^\circ$$

$$\sphericalangle BAC = 90^\circ$$

c.n.d.

Rozwiązania zadań

I etap gimnazjum wersja B

Zadanie 1

Najpierw zamienimy procenty na ułamki.

Do rozwiązania zadania wykorzystamy układ równań

x: ciężar miedzi w stopie

y: ciężar cynku w stopie

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ \frac{1}{9}x + \frac{1}{7}y = 2\frac{8}{9} \quad \Big| \cdot 63 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 7x + 9y = 182 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań np. metodą podstawiania otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 17 \\ y = 7 \end{cases}$$

Odpowiedź: W tym stopie znajduje się 17 kg miedzi i 7 kg cynku.

Zadanie 2

x: cyfra dziesiątek $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
7-x: cyfra jedności
10x + (7-x): szukana liczba
10(7-x) + x: liczba po przestawieniu cyfr

$[10x + (7-x)][10(7-x) + x] = 1300$

Po uporządkowaniu równania otrzymujemy równanie stopnia drugiego:

$81x^2 - 567x + 810 = 0 |:81$
$x^2 - 7x + 10 = 0$

Równanie można rozwiązać wykorzystują wyróżnik równania kwadratowego lub rozkład na iloczyn.

I sposób rozwiązania równania

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$
$\sqrt{\Delta} = 3$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2$ $\quad x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$

II sposób rozwiązania równania

$x^2 - 7x + 10 = 0$
$x^2 - 2x + 10 - 5x = 0$
$x(x-2) - 5(x-2) = 0$
$(x-5)(x-2) = 0$
$x - 2 = 0 \quad lub \quad x - 5 = 0$
$x_1 = 2 \quad x_2 = 5$
Dla $x = 2$ $\quad 10 \cdot 2 + 5 = 25$, dla $x = 5$ $\quad 10 \cdot 5 + 2 = 52$

Odpowiedź: Zadanie ma dwa rozwiązania, szukana liczba to 25 lub 52.

Zadanie 3

$$\frac{a}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}=\frac{a}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}-\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}+a}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}(a-2)+a}{2}=\frac{\sqrt{3}(a-2)}{2}+\frac{a}{2}$$

To wyrażenie będzie miało wartość wymierną, jeżeli a = 2 lub całe wyrażenie będzie miało wartość 0

$$\frac{\sqrt{3}(a-2)+a}{2}=0$$
$$a\sqrt{3}-2\sqrt{3}+a=0$$
$$a(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}$$
$$a=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

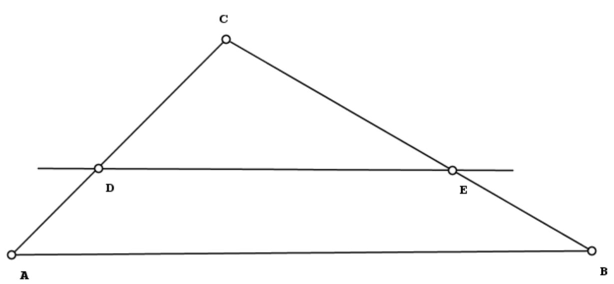
Po usunięciu niewymierności z mianownika otrzymujemy

$$a=3-\sqrt{3}$$

Odpowiedź:

Wyrażenie $\frac{a}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}$ będzie miało wartość wymierną dla $a=2\ \ lub\ a=3-\sqrt{3}$

Zadanie 4



Założenie:

AC = 4 BC =6 AB = 8
DE || AB

$P_{\Delta DCE}=P_{ABED}$

Wykazujemy, że trójkąty ABC i DEC są podobne.

Prosta DE jest równoległa do prostej AB, zatem z twierdzenia o kątach odpowiadających

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEC \quad i \quad \sphericalangle BAC = \sphericalangle EDC$

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE$, bo jest to wspólny kąt dla obydwóch trójkątów.

Z cechy podobieństwa trójkątów KKK $\Delta ACB \sim \Delta DCE$

Wyznaczamy skalę podobieństwa, skorzystamy z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych

$P_{\Delta ACB} = P_{\Delta DCE} + P_{ABED}$ i $P_{\Delta DCE} = P_{ABED}$ stąd $P_{\Delta DCE} = \frac{1}{2} P_{\Delta ACB}$

$\frac{P_{\Delta DEC}}{P_{\Delta ABC}} = k^2 \qquad \frac{P_{\Delta DEC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}$ stąd $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = k$$

$$\frac{DE}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{CD}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{CE}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Otrzymujemy:

długości boków ΔDEC

$$CD = 2\sqrt{2}; \quad DE = 4\sqrt{2}; \quad CE = 3\sqrt{2}$$

długości ramion trapezu

$$AD = 4 - 2\sqrt{2} = 2(2 - \sqrt{2}); \quad BE = 6 - 3\sqrt{2} = 3(2 - \sqrt{2})$$

Zadanie 5

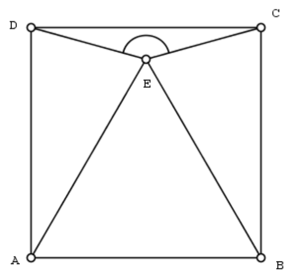
I przypadek

AB = AD (bo ABCD – kwadrat)

AB = AE (AEB – trójkąt równoboczny)

stąd AE = AD czyli ΔDAE równoramienny i < DAE = $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

zatem < AED =$(180^\circ - 30^\circ):2 = 75^\circ$



analogicznie

EB = AB = BC czyli ΔEBC równoramienny i < CBE = $90^o – 60^o = 30^o$

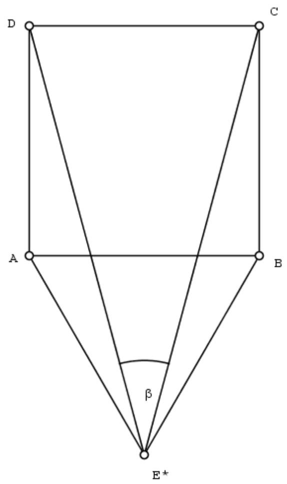
oraz <BEC = $(180^o – 30^o):2 = 75^o$

< DEA + <AEB + <BEC + α =360^o

$75^o + 60^o + 75^o + \alpha = 360^o$

α = 150^o

II przypadek



AB = AD (bo ABCD – kwadrat)

AB = AE (AEB – trójkąt równoboczny)

stąd AE = AD czyli ΔDAE równoramienny i < DAE = $90^o + 60^o =150^o$

zatem < AED =$(180^o – 150^o):2 = 15^o$

analogicznie

EB = AB = BC czyli ΔEBC równoramienny i < CBE = $90^o + 60^o = 150^o$

oraz <BEC = $(180^o – 150^o):2 = 15^o$

< AED + β+ <AEB =60^o

$15^o + \beta + 15^o = 60^o$

β = 30^o

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA I ETAP
SZKOŁA POGIMNAZJALNA
WERSJA A (ŁATWIEJSZA)

ZADANIE 1

Ile powinno wynosić roczne oprocentowanie, by Twoja lokata podwoiła się po dwóch latach przy rocznej kapitalizacji odsetek? Wynik podaj w przybliżeniu do 1%.

ZADANIE 2

Oblicz długości boków trójkąta równoramiennego o polu $25\sqrt{2}$ i kącie 45^0 między ramionami.

ZADANIE 3

Trójkąt o bokach 4,6,8 podzielono prostą równoległą do boku 8 na dwie części o równych polach. Oblicz długości boków otrzymanych figur.

ZADANIE 4

Ojciec i syn mają razem 39 lat. Kiedy syn będzie w wieku ojca, iloczyn ich lat wyniesie 1980. Ile każdy z nich ma lat?

ZADANIE 5

Z 230 zapałek ułożono trójkąty i pięciokąty tak, że jedna zapałka tworzy jeden bok. Ile ułożono trójkątów, a ile pięciokątów, jeżeli łączna liczba figur wyraża się pełnymi dziesiątkami?

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA I ETAP
SZKOŁA POGIMNAZJALNA
WERSJA B (TRUDNIEJSZA)

ZADANIE 1

Ciężar stopu miedzi i cynku wynosi 24 kg. Przy zanurzeniu w wodzie stop ten traci na ciężarze $2\frac{8}{9}$ kg. Znajdź ciężar samej miedzi i ciężar samego cynku w tym stopie, jeżeli miedź traci na ciężarze przy zanurzeniu w wodzie $11\frac{1}{9}$%, a cynk $14\frac{2}{7}$%.

ZADANIE 2

Dla jakich wartości parametru m równanie

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = m$$

ma więcej niż trzy pierwiastki?

ZADANIE 3

Wykaż, że liczba $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2001} + 3^{2002}$ jest podzielna przez 12.

ZADANIE 4

Narysuj zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne x, y spełniają nierówność

$$\log_{(x-y)}(x+y) \leq 1$$

ZADANIE 5

Prosta k jest styczna do okręgu w punkcie A. Prosta t, prostopadła do prostej k, przecina okrąg w punktach B i C, zaś prostą k w punkcie D tak, że $|BC| = 4{,}8|AD|$. Oblicz tangens kąta ostrego AWB wpisanego w dany okrąg.

Rozwiązania zadań
I etap szkoła podgimnazjalna
wersja A

ZADANIE 1

p: roczne oprocentowanie lokaty, p>0
K: kapitał

$2K = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ / : K i $K \neq 0$

$2 = \left(1+\frac{p}{100}\right)^2$

$1+\frac{p}{100} = \sqrt{2}$

$\frac{p}{100} = \sqrt{2}-1$

$p = 100\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 41$

ZADANIE 2

I sposób

Niech *b* - długość ramienia trójkąta równoramiennego, *a* - długość podstawy trójkąta.

$P = \frac{1}{2}\, b^2 \sin 45^o$

$25\sqrt{2} = \frac{1}{2}\, b^2\, \frac{\sqrt{2}}{2}$ $/ \cdot \frac{4}{\sqrt{2}}$

$b^2 = 100$

($b = 10$ lub $b = -10$) i b > 0 .

Zatem b = 10

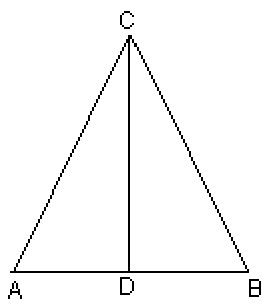
Z twierdzenia cosinusów: $a^2 = 2\cdot b^2 - 2\cdot b^2 \cos 45^o$

$a^2 = 200 - 100\sqrt{2}$

($a = \sqrt{200-100\sqrt{2}}$ lub $a = -\sqrt{200-100\sqrt{2}}$) i a > 0

Zatem $a = 10\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Odpowiedź: Długości boków trójkąta równoramiennego wynoszą: 10 oraz $10\sqrt{2-\sqrt{2}}$



II sposób

$P_{ABC} = 25\sqrt{2}$

$|AB| = a$

$|AC| = |BC| = b$

$|\angle ACB| = \alpha = 45^\circ$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\alpha$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}b^2 \sin 45^\circ \Rightarrow 25\sqrt{2} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = 10$$

Trójkąt *ABC* jest równoramienny, a więc $|\angle ACD| = |\angle BCD| = \frac{\alpha}{2}$.

Korzystamy ze wzoru $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ i $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, otrzymujemy zależność

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Dla $\alpha = 45^\circ$ $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

W trójkącie prostokątnym *ADC*

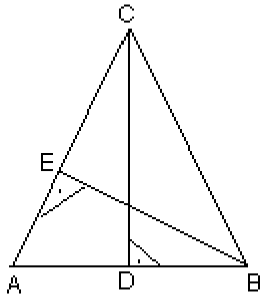
$$\sin\angle ACD = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{b}$$

A zatem

$$\frac{\frac{1}{2}a}{10} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 10\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Odpowiedź: Długość podstawy trójkąta wynosi $10\sqrt{2-\sqrt{2}}$, długość ramienia 10.

III sposób



$$P_{ABC} = 25\sqrt{2}$$

$$|AB| = a$$

$$|AC| = |BC| = b$$

$$|\angle ACB| = \alpha = 45^\circ$$

Analogicznie do poprzedniego rozwiązania: $P_{ABC} = \frac{1}{2}b^2 \sin 45^\circ \Rightarrow 25\sqrt{2} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = 10$

Wykorzystujemy wzór $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BE|$ lub $\sin\alpha = \frac{|BE|}{|BC|}$, otrzymujemy

$$|BE| = 5\sqrt{2}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *BEC* lub $\cos\alpha = \frac{|CE|}{|BC|}$, lub faktu, że trójkąt *BEC* jest równoramienny prostokątny, otrzymujemy

$$|CE| = 5\sqrt{2}$$

$$|AE| = |AC| - |CE| = 10 - 5\sqrt{2}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *AEB*, otrzymujemy zależność

$$|AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2$$

$$a^2 = \left(10 - 5\sqrt{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2$$

$$a^2 = 200 - 100\sqrt{2}$$

$$\left(a = -10\sqrt{2-\sqrt{2}} \vee a = 10\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \wedge a > 0 \Rightarrow a = 10\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Odpowiedź: Długość podstawy trójkąta wynosi $10\sqrt{2-\sqrt{2}}$, długość ramienia 10.

IV sposób

Analogicznie do rozwiązania poprzedniego otrzymujemy: $b = |AC| = 10, |BE| = |CE| = 5\sqrt{2}$.

Zauważamy, że w trójkątach prostokątnych *AEB* oraz *ADC* kąt ostry przy wierzchołku *A* jest wspólny, zatem na podstawie cechy *kkk* trójkąty *AEB* oraz *ADC* są podobne.

$$\Delta AEB \sim \Delta ADC \;\Rightarrow\; \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \;\Rightarrow\; \frac{10-5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a} = \frac{a}{10}$$

$$\frac{1}{2}a^2 = 100 - 50\sqrt{2} \wedge a > 0 \Rightarrow a = 10\sqrt{2-2\sqrt{2}}$$

Odpowiedź: Długość podstawy trójkąta wynosi $10\sqrt{2-\sqrt{2}}$, długość ramienia 10.

ZADANIE 3

I sposób

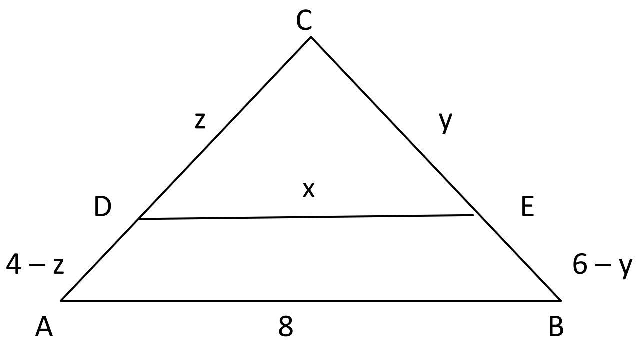
$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE|$ - kąt wspólny

$|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CAB|$ - kąty odpowiadające

$\Delta ABC \sim \Delta DEC \quad (kkk)$

$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta DEC}} = 2 = k^2$

$k = \sqrt{2}$



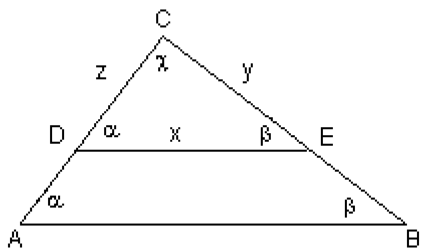
$\frac{|AB|}{|DE|} = \sqrt{2}, \quad \frac{8}{x} = \sqrt{2}, \quad x = 4\sqrt{2}$

$\frac{|BC|}{|EC|} = \sqrt{2}, \quad \frac{6}{y} = \sqrt{2}, \quad y = 3\sqrt{2}$

$\frac{|AC|}{|DC|} = \sqrt{2}, \quad \frac{4}{z} = \sqrt{2}, \quad z = 2\sqrt{2}$

Odpowiedź: Długości boków trójkąta wynoszą: $4\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$.
Długości boków trapezu wynoszą: $8,\ 6-3\sqrt{2},\ 4-2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}$.

II sposób



$|AC| = 4, |BC| = 6, |AB| = 8$

$P_{ABED} = P_{DEC}$

$DE \parallel AB$

$|\angle CAB| = |\angle CDE| = \alpha$ oraz $|\angle CBA| = |\angle CED| = \beta$ (kąty odpowiadające)

$P_{ABED} = P_{DEC}$ i $P_{ABED} + P_{DEC} = P_{ABC}$, a zatem

$$P_{DEC} = \frac{1}{2} P_{ABC}$$

Przyjmując oznaczenia $|DE| = x, |CE| = y, |CD| = z$ oraz wykorzystując wzór na pole trójkąta, otrzymujemy zależności:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \sin\alpha = 16\sin\alpha$$

$$\left(P_{DEC} = \frac{1}{2} x z \sin\alpha \text{ i } P_{DEC} = \frac{1}{2} P_{ABC} = 8\sin\alpha \right) \Rightarrow x z = 16$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \sin\beta = 24\sin\beta$$

$$\left(P_{DEC} = \frac{1}{2} x y \sin\beta \text{ i } P_{DEC} = \frac{1}{2} P_{ABC} = 12\sin\alpha \right) \Rightarrow x y = 24$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AC| \cdot \sin\chi = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \sin\chi = 12\sin\chi$$

$$\left(P_{DEC} = \frac{1}{2} y z \sin\chi \text{ i } P_{DEC} = \frac{1}{2} P_{ABC} = 6\sin\chi \right) \Rightarrow y z = 12$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x z = 16 \\ x y = 24 \\ y z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \\ y = 3\sqrt{2} \\ z = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Odpowiedź: Długości boków trójkąta *DEC*: $4\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$.

Długości boków trapezu *ABED*: $8, 6 - 3\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$.

ZADANIE 4

I sposób

Oznaczmy: x : wiek ojca obecnie

39 – x : wiek syna obecnie

x – (39 – x) = 2x - 39 : za ile lat syn będzie w wieku ojca

3x – 39 : wiek ojca za 2x – 39 lat

(3x – 39) · x = 1980

$3x^2 - 39x - 1980 = 0$
$x^2 - 13x - 660 = 0$
(x = - 20 lub x = 33) i x > 0

Odpowiedź: Ojciec ma 33 lata, a syn 6 lat.

II sposób

x – wiek ojca obecnie

y – wiek syna obecnie

z – liczba lat, po upływie których syn będzie w obecnym wieku ojca

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} y + z = x \\ x + y = 39 \\ (x+z)(y+z) = 1980 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x - y \\ y = 39 - x \\ (2x - y)x = 1980 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (2x - 39 + x)x = 1980 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 39x - 1980 = 0$$

$$x^2 - 13x - 660 = 0$$

$$(x = -20 \vee x = 33) \wedge x > 0 \Rightarrow x = 33$$

Odpowiedź: Syn ma 3 lata, ojciec ma 33 lata.

ZADANIE 5
I sposób

liczba trójkątów x
liczba pięciokątów y
liczba wyrażona pełnymi dziesiątkami k

$$\begin{cases} 3x + 5y = 230 \\ x + y = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 230 \\ -3x - 3y = -3k \end{cases}$$

$2y = 230 - 3k$, $y = 115 - 1{,}5k$ i $y > 0$.

Stąd $115 - 1{,}5k > 0$

$$k < 76\tfrac{2}{3}$$

$x = k - y$, $x = 2{,}5k - 115$ i $x > 0$.

Stąd $2{,}5k - 115 > 0$

$$k > 46$$

$\left(k < 76\tfrac{2}{3} \quad i \quad k > 46\right)$ $\rightarrow$ k = 50 , k = 60 , k = 70

k	X = 2,5k – 115	Y = 115 – 1,5k
50	10	40
60	35	25
70	60	10

Odpowiedź: Ułożono 10 trójkątów i 40 pięciokątów lub 35 trójkątów i 25 pięciokątów lub 60 trójkątów i 10 pięciokątów.

II sposób

x – liczba trójkątów

y – liczba pięciokątów

$$3x + 5y = 230$$

$$y = -\frac{3}{5}x + 46$$

$y \in N_+ \Rightarrow x = 5k \wedge k \in N_+$

$x + y = 10n \wedge n \in N_+ \wedge x = 5k \Rightarrow y = 10n - 5k$

$$3 \cdot 5k + 5(10n - 5k) = 230$$

$$15k + 50n - 25k = 230$$

$$k = 5n - 23$$

$$y = 10n - 5k \wedge k = 5n - 23 \Rightarrow y = -15n + 115$$

$$(k > 0 \wedge y > 0 \wedge n \in N_+) \Rightarrow (5n - 23 > 0 \wedge -15n + 115 > 0 \wedge n \in N_+) \Rightarrow \left(n > 4\frac{3}{5} \wedge n < 7\frac{2}{3} \wedge n \in N_+\right)$$

A zatem $n \in \{5, 6, 7\}$

$$n = 5 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 10 \wedge y = 40$$

$$n = 6 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow x = 35 \wedge y = 25$$

$$n = 7 \Rightarrow k = 12 \Rightarrow x = 60 \wedge y = 10$$

Odpowiedź: Ułożono 10 trójkątów i 40 pięciokątów lub 35 trójkątów i 25 pięciokątów, lub 60 trójkątów i 10 pięciokątów.

Rozwiązania zadań
I etap szkoła pogimnazjalna
wersja B

ZADANIE 1

x - ciężar miedzi

y - ciężar cynku

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 11\frac{1}{9}\%\, x + 14\frac{2}{7}\%\, y = 2\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ \frac{1}{9}x + \frac{1}{7}y = \frac{26}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 7x + 9y = 182 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 17 \\ y = 7 \end{cases}$$

Odpowiedź: Miedź ma ciężar 17 kg, a cynk 7 kg.

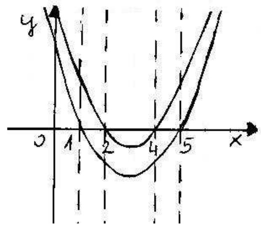
ZADANIE 2

$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = m$

rysunek pomocniczy (ustalamy znak wyrażeń w wartościach bezwzględnych):

$x^2 - 6x + 8$: m. zerowe: x = 2 , x = 4

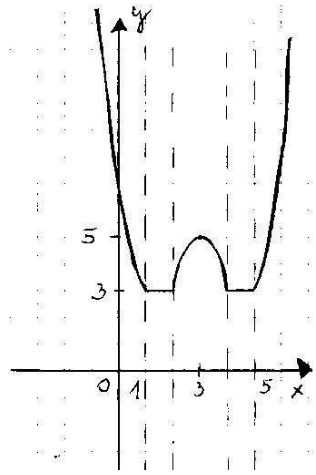
$x^2 - 6x + 5$: m. zerowe: x = 1 , x = 5



$\begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty) \\ y = 2x^2 - 12x + 13 \end{cases}$ lub

$\begin{cases} x \in \langle 1; 2\rangle \cup \langle 4; 5\rangle \\ y = 3 \end{cases}$ lub

$\begin{cases} x \in (2; 4) \\ y = -2x^2 + 12x - 13 \end{cases}$



Odpowiedź: Równanie ma więcej niż trzy pierwiastki dla $m \in (3; 5)$

ZADANIE 3

I sposób

$12 \quad dzieli \quad 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{2001} + 3^{2002}$

jeśli $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + +3^6 + \dots + 3^{2001} + 3^{2002} = 12 \cdot k$ i $k \in N$

DOWÓD:

$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{2001} + 3^{2002} =$

$= 3(1 + 3) + 3^3(1 + 3) + 3^5(1 + 3) + \dots + 3^{2001}(1 + 3) =$

$= 4 \cdot (3 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2001}) = 4 \cdot 3 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2000}) = 12 \cdot k$ i $k \in N$

II sposób

Teza: Liczba $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2001} + 3^{2002}$ jest podzielna przez 12.

Dowód:

$a_1 = 3, a_2 = 3^2, a_3 = 3^3, \ldots, a_n = 3^{2002}$

Zauważamy, że liczba $3+3^2+3^3+\ldots+3^{2001}+3^{2002}$ jest sumą *n* wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), gdzie $a_1=3, q=3, n=2002$.

$$S_{2002}=3\cdot\frac{1-3^{2002}}{1-3}=3\cdot\frac{3^{2002}-1}{2}$$

Liczba S_{2002} jest podzielna przez 12 $\Leftrightarrow$ liczba $\dfrac{3^{2002}-1}{2}$ jest podzielna przez 4

$\Leftrightarrow$ liczba $3^{2002}-1$ jest podzielna przez 8

$$3^{2002}-1=\left(3^{1001}-1\right)\left(3^{1001}+1\right)$$

Liczby $3^{1001}-1$ oraz $3^{1001}+1$ to dwie kolejne liczby parzyste, zatem jedna z tych liczb jest podzielna przez 4, druga podzielna przez 2. Wynika z tego, że liczba $3^{2002}-1$ jest podzielna przez 8.

A zatem

$$3+3^2+3^3+\ldots+3^{2001}+3^{2002}=3\cdot\frac{8k}{2}=12k\wedge k\in N_+$$, co kończy dowód.

Odpowiedź: Wykazaliśmy, że liczba $3+3^2+3^3+\ldots+3^{2001}+3^{2002}$ jest podzielna przez 12.

ZADANIE 4

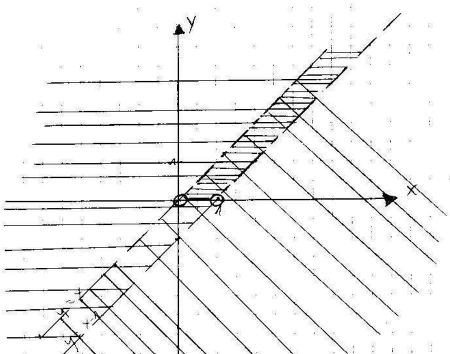
$\log_{(x-y)}(x+y)\le 1$

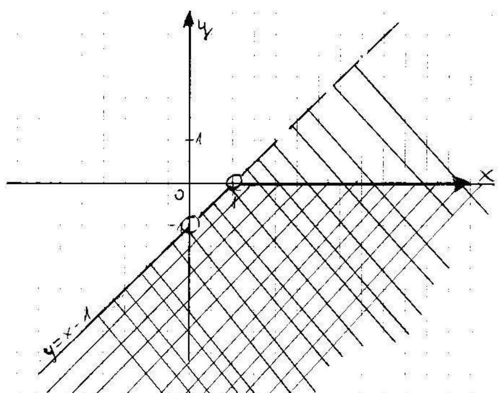
D: $\begin{cases}x-y>0\\x-y\neq 1\\x+y>0\end{cases}$

$\log_{(x-y)}(x+y)\le\log_{(x-y)}(x-y)$

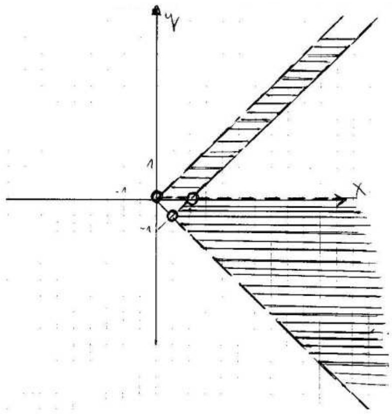
$\begin{cases}x-y>0\\x-y<1\\x+y>0\\x+y\ge x-y\end{cases}$ lub $\begin{cases}x-y>1\\x+y>0\\x+y\le x-y\end{cases}$

$\begin{cases}y<x\\y>x-1\\y>-x\\y\ge 0\end{cases}$ lub $\begin{cases}y<x-1\\y>-x\\y\le 0\end{cases}$





Odpowiedź:

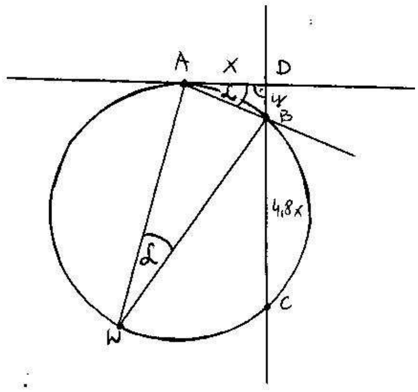


ZADANIE 5

I sposób

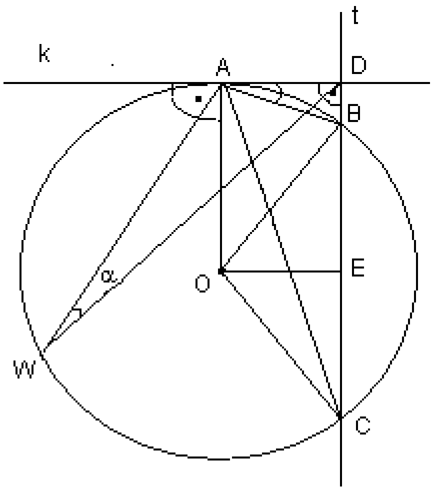
Kąt BAD równy jest kątowi wpisanemu AWB
(kąt dopisany do kąta wpisanego oparty na tym samym łuku).
Niech $|AD| = x$, $|BC| = 4{,}8x$, $|DB| = y$
Z twierdzenia o odcinkach siecznej i stycznej mamy:

$$|DC| \cdot |DB| = |DA|^2$$
$$y \cdot (y + 4{,}8x) = x^2$$
$$y^2 + 4{,}8x \cdot y - x^2 = 0 \quad /: x^2$$
$$\frac{y^2}{x^2} + 4{,}8\frac{xy}{x^2} - 1 = 0$$
$$tg^2\alpha + 4{,}8tg\alpha - 1 = 0$$
$$(tg\alpha = 0{,}2 \quad lub \quad tg\alpha = -5) \quad i \quad tg\alpha > 0$$



Odpowiedź: Tangens kąta ostrego AWB wpisanego w dany okrąg wynosi 0,2

II sposób



$k \perp t$

$|BC| = 4{,}8|AD|$

$|\angle AWB| = \alpha$

$tg\alpha = ?$

$\left|\angle AOB\right| = 2\alpha$ kąt środkowy oparty na łuku *AB*

$\left|AO\right| = \left|OB\right| = r \Rightarrow \Delta AOB$ równoramienny $\Rightarrow \left|\angle OAB\right| = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

$\left|\angle BAD\right| = \left|\angle OAD\right| - \left|\angle BAD\right| = 90^\circ - (90 \ - \alpha) = \alpha \Rightarrow \left|\angle BAD\right| = \left|\angle AWB\right|$

ΔADB prostokątny $\Rightarrow tg\alpha = \dfrac{\left|DB\right|}{\left|AD\right|}$

ΔBOC równoramienny i $OE \perp BC \Rightarrow \left|BE\right| = \left|EC\right| = \dfrac{1}{2}\left|BC\right|$

$OE \perp DC \wedge AD \perp DC \wedge OA \perp AD \Rightarrow \left|OE\right| = \left|AD\right| \wedge \left|DE\right| = \left|AO\right| = r$

$\left|DE\right| = \left|DB\right| + \left|BE\right| \Rightarrow r = \left|DB\right| + \dfrac{1}{2}\left|BC\right|$

ΔOEB prostokątny $\Rightarrow \left|OB\right|^2 = \left|OE\right|^2 + \left|BE\right|^2 \Rightarrow r^2 = \left|AD\right|^2 + \left(\dfrac{1}{2}\left|BC\right|\right)^2$

$$\left(\left|DB\right| + \frac{1}{2}\left|BC\right|\right)^2 = \left|AD\right|^2 + \left(\frac{1}{2}\left|BC\right|\right)^2$$

$$\left|DB\right|^2 + \left|DB\right| \cdot \left|BC\right| = \left|AD\right|^2$$

Z założenia $\left|BC\right| = 4{,}8\left|AD\right|$, a więc

$$\left|DB\right|^2 + 4{,}8\left|DB\right| \cdot \left|AD\right| - \left|AD\right|^2 = 0$$

Rozwiążemy równanie kwadratowe ze zmienną $\left|DB\right|$.

$\Delta = \left(4{,}8\left|AD\right|\right)^2 + 4\left|AD\right|^2 = 27{,}04\left|AD\right|^2 \qquad \sqrt{\Delta} = 5{,}2\left|AD\right| \qquad \left(\left|AD\right| > 0\right)$

$$\left(\left|DB\right| = -5\left|AD\right| \vee \left|DB\right| = 0{,}2\left|AD\right|\right) \wedge \left|DB\right| > 0 \Rightarrow \left|DB\right| = 0{,}2\left|AD\right|$$

A zatem

$$tg\alpha = \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{0,2|AD|}{|AD|} = 0,2$$

Odpowiedź: Tangens kąta ostrego *AWB* jest równy 0,2.

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE DLA UCZNIOW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH FINAŁ

Zadanie 1

Stefek i Michał odrabiają pracę domową z matematyki. Stefek rozwiązuje jedno zadanie w ciągu 6 minut, zaś Michał w ciągu 10 minut. Gdy Stefek rozwiązał wszystkie swoje zadania, Michałowi zostały jeszcze 2 zadania. Ile zadań mieli do rozwiązania chłopcy?

Zadanie 2

Narysuj kwadrat ABCD oraz trójkąt równoboczny ABE (bok AB jest wspólny dla obu figur). Oblicz miarę kąta DEC.

Zadanie 3

Mama położyła na stole śliwki i napisała na kartce list do dzieci, żeby każde z nich wzięło trzecią ich część. Pierwszy który wrócił, wziął trzecią część i poszedł do kolegi. Drugi wrócił, wziął trzecią część i wyszedł. Podobnie postąpił trzeci. Ile śliwek zostawiła mama, jeśli ostatni wziął cztery śliwki?

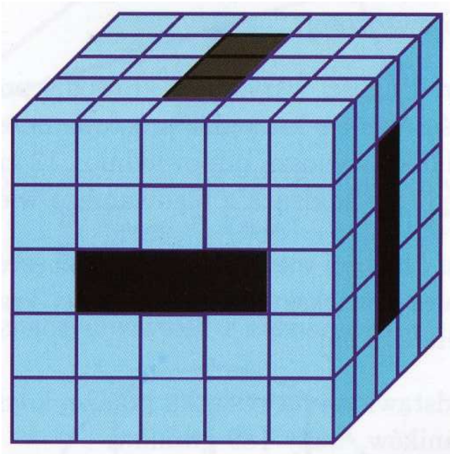
Zadanie 4

Litery zastąp cyframi tak, aby liczby, które w ten sposób powstaną tworzyły poprawne działanie. Jednakowe litery oznaczają jednakowe cyfry.

$$\begin{array}{r} A\,U\,T\,O \\ A\,U\,T\,O \\ +\ \underline{A\,U\,T\,O} \\ K\,O\,R\,E\,K \end{array}$$

Zadanie 5

W dużej sześciennej kostce, zbudowanej z małych sześcianików, wydrążono na wylot tunele prostopadłe do ścian (patrz rysunek). Ile małych sześcianików pozostało?



Rozwiązania zadań
finał szkoła podstawowa
Zadanie 1
I sposób

Gdy Stefek skończy rozwiązywanie zadań, to Michałowi zostaną 2 zadania. Ze swojej perspektywy uzyskał on przewagę 2 zadań równą 2 · 6 = 12 minut. Ponieważ na każdym zadaniu Michał traci 4 minuty do Stefka, więc 12 minut przewagi Stefka oznacza 12 : 4 = 3 zadania Michała. Tak więc gdy Stefek skończył zadania, Michał zrobił ich 3. Dodając 2 zadania, które mu jeszcze zostały otrzymujemy łącznie 5 zadań, jakie mieli do zrobienia chłopcy.

II sposób

Na każdym zadaniu Michał traci 4 minuty do Stefka. Łącznie stracił 20 minut.
Zatem do rozwiązania było 20 : 4 = 5 zadań.

III sposób

Stefek rozwiązał wszystkie zadania w czasie, w którym Michał rozwiązał wszystkie zadania bez dwóch. Zatem, jeśli x będzie liczbą zdań w pracy domowej, to:

$6x = 10(x-2)$

$4x = 20$

$x = 5$

IV sposób

Ilość zadań	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Czas(w min.) rozwiązywania	**6**	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**	**48**	**54**	**60**

przez Stefka										
Czas (w min.) rozwiązywania przez Michała	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**

Można zauważyć, że w tym samym czasie Michał rozwiązał 2 lub 4 zadania mniej niż Stefan. Interesuje nas różnica dwóch zadań. Wtedy Stefek rozwiązał 5 zadań i skończył pracę.

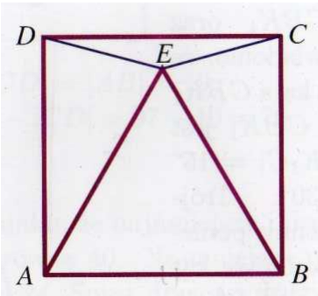
Można też zauważyć, gdzie różnice czasów pracy wyrażone są pełnymi dziesiątkami. Przy rozwiązaniu 5 lub 10 zadań. Interesuje nas 20 minut jako czas na rozwiązanie przez Michała dwóch zadań, gdy Stefek rozwiązał 5 zadań i skończył pracę.

Odpowiedź: Każdy z chłopców miał do rozwiązania 5 zadań.

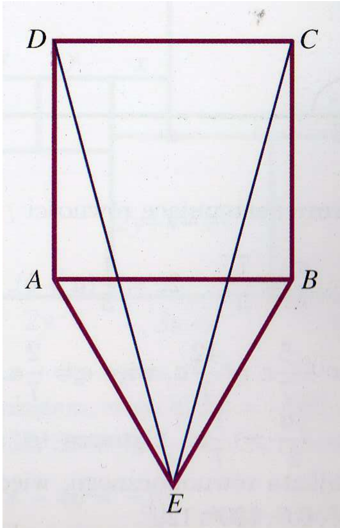
Zadanie 2

Możliwe są dwa przypadki:

1. Wierzchołek E trójkąta równobocznego ABE znajduje się wewnątrz kwadratu ABCD. Trójkąty ADE oraz BEC SA równoramienne. Obliczamy, że kąty EBC oraz DAE maja miarę 30°, zatem pozostałe kąty w tych trójkątach są równe 75°. Stąd miara kąta DEC jest równa 360°-(60°+75°+75°)=150°.



2. Wierzchołek E trójkąta równobocznego ABE znajduje się na zewnątrz kwadratu ABCD. Trójkąty ADE oraz BEC są równoramienne i łatwo obliczyć, że mają kąty wewnętrzne równe 150°, 15°, 15°. Stąd miara kąta DEC jest równa 60°-(15°+15°)=30°.



Zadanie 3

I sposób

Ostatni wziął 4, gdyż była to trzecia część tego, co zostawił drugi.
Drugi wziął 6, gdyż 2/3 tego co zostawił to 12. Zatem na stole, gdy brał śliwki było ich 18.
Pierwszy wziął 9, gdyż 2/3 tego co zostało po nim to 18 śliwek.
Mama zostawiła 27 śliwek.

II sposób

dziecko	trzecie	drugie	pierwsze
wzięło śliwek	**4**	**12 : 2 = 6**	**18 : 2 = 9**
zostawiło śliwek	**8**	**12**	**18**
zastało śliwek	**4 · 3 = 12**	**6 · 3 = 18**	**9 · 3 = 27**

Mama zostawiła 27 śliwek.

Zadanie 4

Trzeba zauważyć, że K =1 lub K = 2. Otrzymujemy rozwiązania:

5807 + 5807 + 5807 = 17421 lub 8064 + 8064 + 8064 = 24192 lub 8304 +8304 + 8304 = 24912 lub 8054 + 8054 + 8054 = 24162

Zadanie 5

W kolejnych warstwach patrząc od góry wydrążono:

w pierwszej	–	3 sześcianiki,
w drugiej	–	5+2=7 sześcianików,
w trzeciej	–	3+3+5+3+3=17 sześcianików,
w czwartej	–	5+2 czyli 7 sześcianików,
w piątej	–	3 sześcianiki.

Łącznie wydrążono 37 sześcianików, co oznacza, że pozostało 125 – 37 =88 sześcianików.

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
DLA UCZNIÓW GIMNAZJÓW
FINAŁ A

ZADANIE 1

Z 1000 kg rudy o zawartości 37,5% żelaza usunięto 400 kg domieszek o zawartości 15% żelaza. O ile podniosła się zawartość procentowa żelaza w pozostałej rudzie?

ZADANIE 2

Oblicz pole trójkąta prostokątnego, gdzie przeciwprostokątna wynosi 4, a suma przyprostokątnych $\sqrt{28}$.

ZADANIE 3

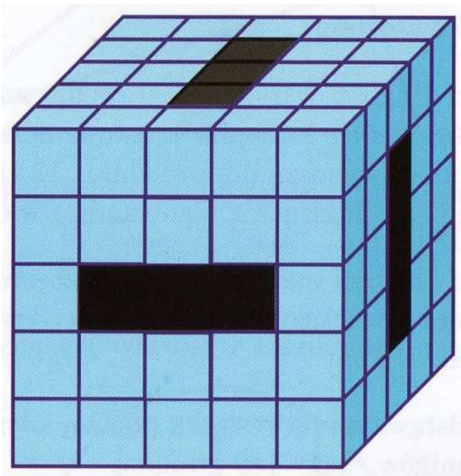
Tata w drodze do domu kupił ciastka swoim córkom. Pierwszej córce dał 1 ciastko i ósmą część pozostałych. Drugiej córce dał 2 ciastka i ósmą część pozostałych. Trzeciej córce dał 3 ciastka i ósmą część pozostałych. Tata rozdawał w ten sposób ciastka aż do ostatniej córki i rozdał wszystkie ciastka. Okazało się, że każda otrzymała tyle samo ciastek. Ile ciastek dostała każda córka?

ZADANIE 4

Narysuj kwadrat ABCD oraz trójkąt równoboczny ABE (bok AB jest wspólny dla obu figur). Oblicz miarę kąta DEC.

ZADANIE 5

W dużej sześciennej kostce, zbudowanej z małych sześcianików, wydrążono na wylot tunele prostopadłe do ścian (patrz rysunek). Ile małych sześcianików pozostało?



X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
DLA UCZNIÓW GIMNAZJÓW
FINAŁ B

ZADANIE 1

Rozwiąż układ równań z parametrem m. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu będzie para liczb o różnych znakach?

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5m + 7 = 0 \\ x - 4y - m - 3 = 0 \end{cases}$$

ZADANIE 2

W trójkąt różnoboczny o podstawie AB = 30 i wysokości CD = 12 wpisano półokrąg o średnicy EF w ten sposób, że jest on styczny do podstawy AB, a średnica jest równoległa do AB. Punkt $E \in AC$, a punkt $F \in BC$. Znajdź długość promienia półokręgu.

ZADANIE 3

Ile powinno wynosić roczne oprocentowanie, by Twoja lokata podwoiła się po dwóch latach przy rocznej kapitalizacji odsetek? Wynik podaj w przybliżeniu do 1%.

ZADANIE 4

Dany jest kwadrat ABCD, punkt P jest środkiem boku AB, punkt Q jest środkiem boku BC, punkt R jest środkiem boku DC, punkt S jest środkiem boku AD. Udowodnij, że proste AR, BS, CP, DQ wyznaczają kwadrat o polu będącym $\frac{1}{5}$ pola kwadratu ABCD.

ZADANIE 5

Tata w drodze do domu kupił ciastka swoim córkom. Pierwszej córce dał 1 ciastko i ósmą część pozostałych. Drugiej córce dał 2 ciastka i ósmą część pozostałych. Trzeciej córce dał 3 ciastka i ósmą część pozostałych. Tata rozdawał w ten sposób ciastka aż do ostatniej córki i rozdał wszystkie ciastka. Okazało się, że każda otrzymała tyle samo ciastek. Ile ciastek dostała każda córka?

Rozwiązania zadań

finał gimnazja wersja A

Zadanie 1

Obliczamy ilość żelaza w 1000 kg rudy
0,375 · 1000 kg = 375 kg

Obliczamy ilość żelaza w usuniętych domieszkach
0,15 · 400kg = 60 kg

Obliczamy zawartość procentową żelaza w rudzie po usunięciu domieszek
1000 kg – 400 kg = 600 kg
375 kg – 60 kg = 315 kg
$\frac{315\ kg}{600\ kg} \cdot 100\% = 52{,}5\%$

52,5% - 37,5% = 15%

Odpowiedź : Zawartość procentowa żelaza w rudzie zwiększyła się o 15.

Zadanie 2

$a + b = \sqrt{28} \quad i \quad P = \frac{1}{2}ab$

z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = 4^2$ lub
$a^2 + b^2 = 16$

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

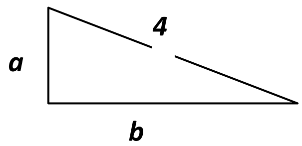
$(a + b)^2 - 2ab = 16$
$\left(\sqrt{28}\right)^2 - 2ab = 16$

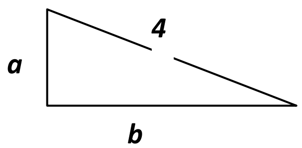
$28 - 2ab = 16$
$2ab = 12 | :4$

$\frac{1}{2}ab = 3$
$P = 3$

I sposób

II sposób





$a + b = \sqrt{28} \quad i \quad P = \frac{1}{2}ab$

z twierdzenia Pitagorasa $\quad a^2 + b^2 = 4^2$ lub $\quad a^2 + b^2 = 16$

$$a = \sqrt{28} - b$$
$$\left(\sqrt{28} - b\right)^2 + b^2 = 16$$

Doprowadzamy do równania : $2b^2 - 2\sqrt{28}b + 12 = 0$

lub $\quad \boldsymbol{b^2 - 2\sqrt{7}b + 6 = 0}$

$$b^2 - 2\sqrt{7}b + 6 = 0 \qquad \Delta = 28 - 24 = 4$$
$$\left(b - \sqrt{7}\right)^2 - 1 = 0 \qquad \sqrt{\Delta} = 2$$
$$\left(b - \sqrt{7} + 1\right)\left(b - \sqrt{7} - 1\right) = 0 \qquad b_1 = \frac{2\sqrt{7} - 2}{2} \qquad b_2 = \frac{2\sqrt{7} + 2}{2}$$

$b_1 = \sqrt{7} - 1 \qquad b_2 = \sqrt{7} + 1 \qquad b_1 = \sqrt{7} - 1 \qquad b_2 = \sqrt{7} + 1$

$a_1 = \sqrt{7} + 1 \qquad a_2 = \sqrt{7} - 1 \qquad a_1 = \sqrt{7} + 1 \qquad a_2 = \sqrt{7} - 1$

$$P = \frac{1}{2}(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1)$$

$$P = 3$$

Zadanie 3

Analiza zadania:

x : ilość wszystkich ciasteczek

$1 + \frac{1}{8}(x - 1)$: tyle ciasteczek dostała pierwsza córka

$2 + \frac{1}{8}\left\{x - \left[1 + \frac{1}{8}(x - 1)\right] - 2\right\}$:tyle ciasteczek dostała druga córka
itd.

Zauważamy, że wszystkie córki dostały po tyle samo ciasteczek i ukladamy równania:

$$1 + \frac{1}{8}(x - 1) = 2 + \frac{1}{8}\left\{x - \left[1 + \frac{1}{8}(x - 1)\right] - 2\right\}$$

Rozwiązujemy równanie

$$\frac{1}{8}x + \frac{7}{8} = \frac{7}{64}x + \frac{105}{64}$$

$$x = 49$$

Obliczamy po ile ciasteczek dostała każda córka:

$$1 + \frac{1}{8}(49 - 1) = 1 + 6 = 7$$

Odp. Każda córka dostała po 7 ciasteczek.

Zadanie 4

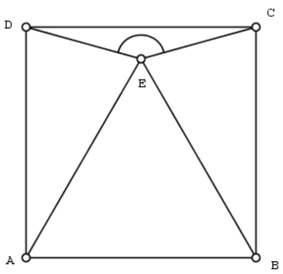
I przypadek

AB = AD (bo ABCD – kwadrat)

AB = AE (AEB – trójkąt równoboczny)

stąd AE = AD czyli ΔDAE równoramienny i < DAE = $90^o - 60^o = 30^o$

zatem < AED =$(180^o - 30^o):2 = 75^o$



analogicznie

EB = AB = BC czyli ΔEBC równoramienny
i < CBE = $90^o - 60^o = 30^o$

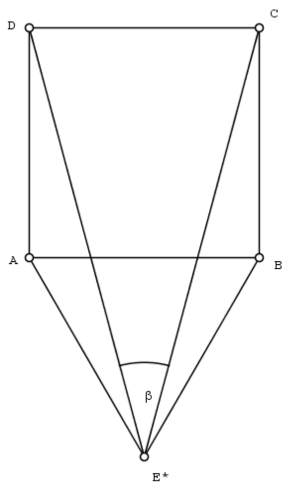
oraz <BEC = $(180^o - 30^o):2 = 75^o$

< DEA + <AEB + <BEC + α =360^o

$$75^o + 60^o + 75^o + \alpha = 360^o$$

$$\boldsymbol{\alpha = 150^o}$$

II przypadek



AB = AD (bo ABCD – kwadrat)

AB = AE (AEB – trójkąt równoboczny)

stąd AE = AD czyli ΔDAE równoramienny i < DAE = $90^o + 60^o = 150^o$

zatem < AED =$(180^o – 150^o):2 = 15^o$

analogicznie

EB = AB = BC czyli ΔEBC równoramienny i < CBE = $90^o + 60^o = 150^o$

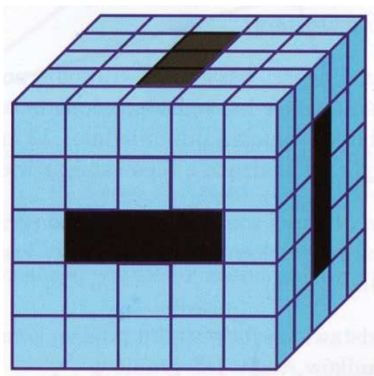
oraz   <BEC = $(180^o – 150^o):2 = 15^o$

< AED + β+ <AEB =60^o

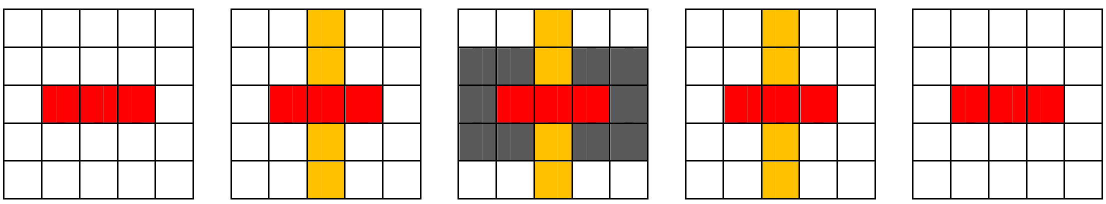
15^o + β+ 15^o = 60^o

β = 30^o

Zadanie 5



Rozwiązanie



Rozkładamy sześcian na warstwy i zaznaczamy jeden tunelu, poprawnie zaznaczamy drugi tunelu, zaznaczamy trzeci tunelu. Obliczamy ilość małych sześcianów w całej dużej kostce sześciennej

$$5^3 = 125$$

Obliczamy ilość pozostałych sześcianów

np. $125 - (2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 17) = 125 - 37 = 88$

lub 22 + 18 + 8 + 18 + 22 = 88

Rozwiązania zadań
finał gimnazja wersja B

Zadanie 1

Rozwiązujemy układ równań dowolną metodą (np.)

$$+\begin{cases} 3x + 4y - 5m + 7 = 0 \\ x - 4y - m - 3 = 0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} 3x + 4y - 5m + 7 = 0 \\ -3x + 12y + 3m + 9 = 0 \end{cases}$$

$4x-6m+4=0$ $\qquad$ $16y - 2m + 16 = 0$

$4x = 6m - 4$ $\qquad$ $16y = 2m - 16$

$x = \frac{3m-2}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{m-8}{8}$

Dla każdego $m \in R$ równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{3m-2}{2}$ $\;i\;$ $y = \frac{m-8}{8}$.

Zapisujemy warunek na pierwiastki różnych znaków

Np. $\qquad x > 0 \; i \; y < 0 \qquad lub \qquad x < 0 \; i \; y > 0$

$$xy < 0$$

Rozwiązujemy warunek

Np.

$$\frac{3m-2}{2} > 0 \quad i \quad \frac{m-8}{8} < 0 \qquad lub \qquad \frac{3m-2}{2} < 0 \quad i \quad \frac{m-8}{8} > 0$$

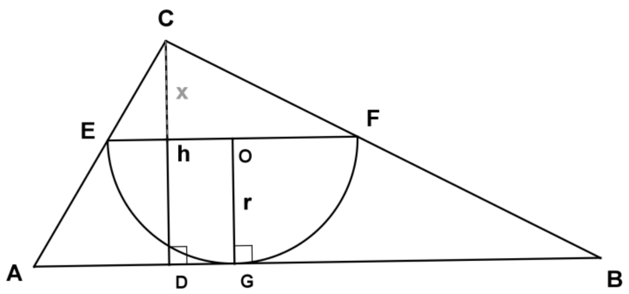
$$m > \frac{2}{3} \quad i \quad m < 8 \qquad\qquad m < \frac{2}{3} \quad i \quad m > 8$$

$$m \in \left(\frac{2}{3}; 8\right) \qquad\qquad m \in \emptyset$$

Odpowiedź:

Dla $m \in \left(\frac{2}{3}\,;8\right)$ rozwiązaniem układu będzie para liczb różnych znaków.

Zadanie 2



Założenie

AB | | EF

EF = 2r

$OG \perp AB \;\; i\, CD \perp AB \;\; oraz\; AB \parallel EF\; stąd\; MD = r \;\; czyli\; x = h - r$

Wykazujemy podobieństwo trójkątów

ΔACB ~ ΔECF (KKK) bo <BAC = < FEC (kat odpowiadające EF | | AB)
< ABC = < EFC (kat odpowiadające EF | | AB)
< ACB = < ECF (ten sam kąt)

Z podobieństwa trójkątów

$\frac{EF}{AB} = \frac{CM}{CD}$ $\quad czyli \quad$ $\frac{2r}{30} = \frac{12-r}{12}$

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy

$$r = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\ cm$$

Odpowiedź: Promień półokręgu ma $6\frac{2}{3}$ cm.

Zadanie 3

K : kapitał początkowy

p : oprocentowanie w skali roku

$K + \frac{pK}{100}$ - kapitał po pierwszym roku

$\frac{p}{100}\left(K + \frac{pK}{100}\right)$ - wysokość odsetek po drugim roku

Ułóżmy równanie

$$K + \frac{pK}{100} + \frac{p}{100}\left(K + \frac{pK}{100}\right) = 2K$$

Rozwiązanie równania

$$\frac{2p}{100} + \frac{p^2}{10000} = 1$$

$$p^2 + 200p - 10000 = 0$$

$$(p + 100)^2 - 20000 = 0$$

$$\left(p + 100 + 100\sqrt{2}\right)\left(p + 100 - 100\sqrt{2}\right) = 0$$

$$p_1 = -100 - 100\sqrt{2} \qquad p_2 = 100\sqrt{2} - 100$$

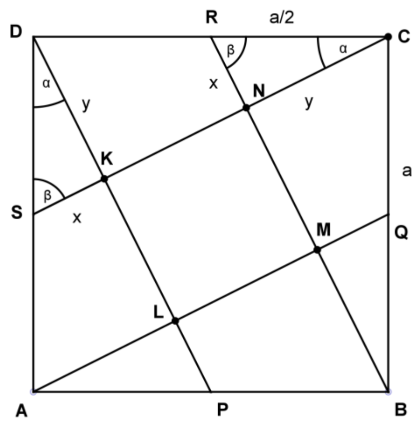
$p_1 < 0$ nie spełnia warunków zadania

$p_2 = 100\sqrt{2} - 100 \approx 100 \cdot 1{,}41 - 100 = 41$

Odpowiedź : Oprocentowanie tej lokaty powinno wynosić 41% w skali roku.

Zadanie 4

Zadanie można rozwiązać kilkoma sposobami, to jeden z nich



Bok kwadratu ABCD = *a*

$P_{ABCD} = a^2$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w ΔRCB $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = RB^2$ i otrzymujemy $RB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Zauważmy, że

$\Delta SDC \equiv \Delta RCD \equiv \Delta QBA \equiv \Delta PAD$ *z cechy* (BKB)

$\sphericalangle DCS = \sphericalangle CBR = \sphericalangle BAQ = \sphericalangle ADP = \alpha$

$\sphericalangle DSC = \sphericalangle CRB = \sphericalangle BQA = \sphericalangle APD = \beta$
$\Delta SKD \equiv \Delta RNC \equiv \Delta QMB \equiv \Delta PLA$ z cechy (KBK) i są to trójkąty prostokątne.

Zatem $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Ponadto z tw. Talesa $(RB \parallel DP)$

$\frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{2}}{a}$ otrzymujemy $\boldsymbol{y = 2x}$

Po podstawieniu do poprzedniego równania $x^2 + (2x)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ stąd

$x = \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$; $y = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

$a_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{10} - \frac{a\sqrt{5}}{5}$ $\boldsymbol{a_1 = \frac{a\sqrt{5}}{5}}$

Zatem $P_{KLMN} = \left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{a^2}{5} = \frac{1}{5}\boldsymbol{P_{ABCD}}$

c.n.d.

\

Zadanie 5

Analiza zadania:

x : ilość wszystkich ciasteczek

$1 + \frac{1}{8}(x-1)$: tyle ciasteczek dostała pierwsza córka

$2 + \frac{1}{8}\left\{x - \left[1 + \frac{1}{8}(x-1)\right] - 2\right\}$: tyle ciasteczek dostała druga córka

itd.

Zauważamy, że wszystkie córki dostały po tyle samo ciasteczek i układamy równanie:

$$1 + \frac{1}{8}(x-1) = 2 + \frac{1}{8}\left\{x - \left[1 + \frac{1}{8}(x-1)\right] - 2\right\}$$

Rozwiązujemy równanie

$$\frac{1}{8}x + \frac{7}{8} = \frac{7}{64}x + \frac{105}{64}$$

$$x = 49$$

Obliczamy po ile ciasteczek dostała każda córka:

$$1+\frac{1}{8}(49-1)=1+6=7$$

Odp. Każda córka dostała po 7 ciasteczek.

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNEDLA UCZNIÓW SZKÓŁ POGIMNAZJALNYCH FINAŁ A

ZADANIE 1

Wyznacz A∩B jeżeli A=$\{(x,y): x=n, y\epsilon R\ i\ n\epsilon C\}$, B=$\{(x,y): y=\sqrt{9-x^2}\}$

ZADANIE 2

Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny znajduje się w odległości 6cm i 8cm od końców dłuższego ramienia. Oblicz pole trapezu.

ZADANIE 3

Wyznacz funkcję f(x + 1), jeżeli dla każdego x zachodzi równość:
$f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.

ZADANIE 4

Wykaż, że jeżeli m jest liczbą całkowitą nieparzystą, to liczba $m^4 - 1$ jest podzielna przez 16.

ZADANIE 5

Tata w drodze do domu kupił ciastka swoim córkom. Pierwszej córce dał 1 ciastko i ósmą część pozostałych. Drugiej córce dał 2 ciastka i ósmą część pozostałych. Trzeciej córce dał 3 ciastka i ósmą część pozostałych. Tata rozdawał w ten sposób ciastka aż do ostatniej córki i rozdał wszystkie ciastka. Okazało się, że każda otrzymała tyle samo ciastek. Ile ciastek dostała każda córka?

X RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE DLA UCZNIÓW SZKÓŁ POGIMNAZJALNYCH FINAŁ B

ZADANIE 1

Znajdź wszystkie pary (x,y) liczb naturalnych spełniających równanie:

$|x-2|+|y-3| = 3 - y$

ZADANIE 2

Na balu tańczyły 42 osoby. Pani A_1 tańczyła z 7 panami, pani A_2 z 8 panami, pani A_3 z 9 panami, itd., a pani A_n z wszystkimi panami. Ile pań i ilu panów tańczyło na tym balu?

ZADANIE 3

Wyznacz kąty rombu, w którym długość boku jest średnią geometryczną długości przekątnych.

ZADANIE 4

Wykaż, że $\sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{8+2\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{10}} = 1$

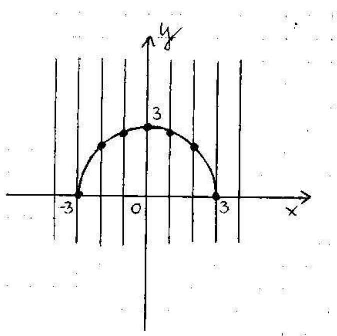
ZADANIE 5

Na okręgu obrano kolejno cztery różne punkty A, B, C, D. Niech A_1, B_1, C_1, D_1 będą środkami łuków AB, BC, CD, DA. Udowodnij, że cięciwy A_1C_1 i B_1D_1 są do siebie prostopadłe.

Rozwiązania zadań
finał szkoła podgimnazjalna
wersja A

ZADANIE 1

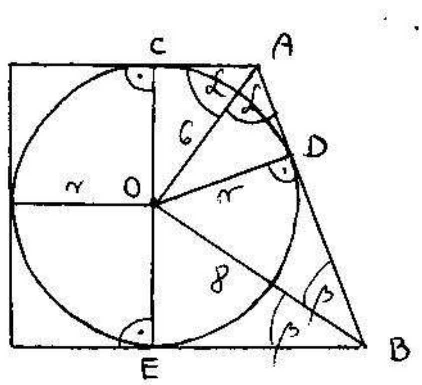
$A = \{(x;y): x = n \ \ i \ \ n \in C, y \in R\}$
$B = \{(x;y): y = \sqrt{9-x^2}\}$



Odpowiedź: $A \cap B = \{(-3;0), (-2;\sqrt{5}), (-1;2\sqrt{2}), (0;3), (1;2\sqrt{2}), (2;\sqrt{5}), (3;0)\}$

ZADANIE 2
I sposób

$\Delta OAC \sim \Delta OAD$ $(cecha\ bkb)$, zatem $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OAD = \alpha$
$\Delta OEB \sim \Delta OBD$ $(cecha\ bkb)$, zatem $\sphericalangle OBE = \sphericalangle OBD = \beta$
Zatem $2\alpha + 2\beta = 180^o$
$\alpha + \beta = 90^o$
Stąd $\sphericalangle AOB = 90^o$
$|CA| = |AD| = y$ oraz $|BD| = |EB| = x$



Z tw. Pitagorasa w $\Delta AOB:$ $(x+y)^2 = 100$ → x + y = 10

w $\Delta OAC:$ $r^2 + y^2 = 36$

w $\Delta OBE:$ $r^2 + x^2 = 64$

Odejmując dwa ostatnie równania stronami otrzymujemy:

$x^2 - y^2 = 28$

$(x - y)(x + y) = 28$

$(x - y) \cdot 10 = 28$

$x - y = 2{,}8$

$x = 2{,}8 + y$

$2{,}8 + y + y = 10$

$y = 3{,}6$ i $x = 6{,}4$

$r^2 + (3{,}6)^2 = 36$

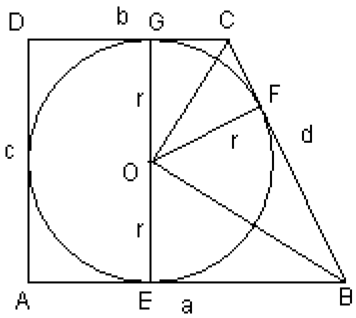
$r^2 = 23{,}04$

($r = 4{,}8$ lub $r = -4{,}8$) i $r > 0$, czyli $r = 4{,}8$.

$a + b = 2r + x + y = 19{,}6$; $h = 2r = 9{,}6$

$$P = \frac{19{,}6}{2} \cdot 9{,}6 = 94{,}08$$

II sposób



$|OC| = 6$ cm, $|OB| = 8$ cm

$P = ?$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot 2r = (a+b)r$$

Trapez jest opisany na okręgu, a więc spełniona jest zależność:

$$a + b = c + d$$

$$c = 2r \Rightarrow a + b = 2r + d \Rightarrow P = (2r + d)r$$

Punkty *F* i *G* są punktami styczności do ramion kąta *DCB,* a więc z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|GC| = |FC|$.

Ponadto $|GO| = |FO| = r$ oraz bok *CO* wspólny, a więc na podstawie cechy przystawania trójkątów *bbb* stwierdzamy, że $\Delta OGC \equiv \Delta OFC$.

Na podstawie analogicznego rozumowania $\Delta OEB \equiv \Delta OFB$.

Z przystawania trójkątów wynika równość kątów

$|\angle GCO| = |\angle OCF| = \alpha$ oraz $|\angle FBO| = |\angle OBE| = \beta$, zatem $|\angle C| = 2\alpha$ i $|\angle B| = 2\beta$.

W trapezie $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, a więc $\alpha + \beta = 90^\circ$.

A zatem trójkąt *BOC* jest prostokątny.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $d^2 = |OB|^2 + |OC|^2 = 100$ i $d > 0$. A zatem $d = 10$ cm.

$P_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ i $P_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r \Rightarrow r = 4{,}8$ cm

$P_{ABCD} = (d + 2r)r = (10 + 9{,}6) \cdot 4{,}8 = 94{,}08$ cm^2.

Odpowiedź: Pole trapezu wynosi 94,08 cm^2.

ZADANIE 3

I sposób

f(x – 1) = $2x^2 - 3x + 1$. Wyznaczymy wzór funkcji f(x).
Niech x – 1 = t i $t \in R$. Wówczas x = t + 1.
Stąd f(t) = $2(t + 1)^2 - 3(t + 1) + 1$
f(t) = $2(t^2 + 2t + 1) - 3t - 3 + 1 = 2t^2 + 4t + 2 - 3t - 3 + 1 = 2t^2 + t$
Zatem f(x) = $2x^2 + x$, natomiast funkcja f(x + 1) = $2(x^2 + 2x + 1) + x + 1 = 2x^2 + 5x + 3$

II sposób

$$f(x) = f((x-1)+1) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) + 1 = 2(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 + 1 = 2x^2 + 4x + 2 - 3x - 2 = 2x^2 + x$$

$$f(x+1) = 2(x+1)^2 + (x+1) = 2(x^2 + 2x + 1) + x + 1 = 2x^2 + 4x + 2 + x + 1 = 2x^2 + 5x + 3$$

Odpowiedź: Szukany wzór $f(x+1) = 2x^2 + 5x + 3$

III sposób

Funkcja $f(x)$ ma postać $f(x)=2x^2+bx+c$.

$$f(x-1)=2x^2-3x+1$$

$$f(x-1)=2(x^2-2x+1)+x-1$$

$$f(x-1)=2(x-1)^2+(x-1)$$

$$f(x)=2x^2+x$$

$$f(x+1)=2(x+1)^2+(x+1)=2x^2+5x+3$$

Odpowiedź: Szukany wzór $f(x+1)=2x^2+5x+3$

IV sposób

$$f(x-1)=2x^2-3x+1$$

$$g(x)=2x^2-3x+1$$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji $g(x)$.

$p=\frac{3}{4}$ $\quad q=-\frac{1}{8}$ $\quad W=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{8}\right)$

Wykres funkcji $f(x+1)$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x)$ o wektor $[-2,0]$.

Wierzchołek wykresu po przesunięciu ma współrzędne $W_1=\left(\frac{3}{4}-2,-\frac{1}{8}\right)=\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$.

Postać kanoniczna funkcji $f(x+1)=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$

Postać ogólna $f(x+1)=2x^2+5x+3$.

ZADANIE 4

Założenie: $m \in C$ i $m = 2n + 1$ i $n \in C$
Teza : 16 dzieli $(m^4 - 1)$
Dowód: 16 dzieli $(m^4 - 1)$ jeśli $m^4 - 1 = 16 s$ i $s \in C$

$$m^4 - 1 = (m^2 - 1)(m^2 + 1) = (m - 1)(m + 1)(m^2 + 1) =$$
$$= (2n + 1 - 1)(2n + 1 + 1)[(2n + 1)^2 + 1] =$$
$$= 2n (2n + 2)(4n^2 + 4n + 2) = 2n \cdot 2(n + 1) 2\cdot(2n^2 +2n + 1) =$$
$$= 8\cdot n (n + 1)(2n^2 + 2n + 1) = \ldots$$

Ponieważ $n(n + 1)$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych, to jedna z nich jest parzysta zatem iloczyn jest liczbą parzystą. Stąd $n(n + 1) = 2k$ i $k \in C$.
Wracając do naszego wyrażenia mamy:

$$\ldots = 8\cdot 2k \cdot(2n^2 + 2n + 1) = 16 \cdot k\cdot(2n^2 + 2n + 1) = 16 s ,$$

bo $k\cdot(2n^2 + 2n + 1)$ jest liczbą całkowitą.

ZADANIE 5

Niech x: ilość ciasteczek
Pierwsza córka dostała tyle ciasteczek: $1 + \frac{1}{8}(x - 1) = 1 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}x + \frac{7}{8}$
Zostało tyle ciasteczek: $x - \left(\frac{1}{8}x + \frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8}x - \frac{7}{8}$
Druga córka dostała tyle ciasteczek : $2 + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}x - \frac{7}{8} - 2\right) = 2 + \frac{7}{64}x - \frac{23}{64} = 1\frac{41}{64} + \frac{7}{64}x$

$$\frac{1}{8}x + \frac{7}{8} = 1\frac{41}{64} + \frac{7}{64}x$$
$$\frac{1}{64}x = \frac{49}{64}$$
$$x = 49$$

Pierwsza córka otrzymała: $\frac{1}{8}\cdot 49 + \frac{7}{8} = \frac{56}{8} = 7$ ciasteczek
Odpowiedź: Córki otrzymały po 7 ciasteczek.

Rozwiązania zadań
finał szkoła podgimnazjalna
wersja B

ZADANIE 1
I sposób

$|x - 2| + |y - 3| = 3 - y$
3 – y jest sumą dwóch liczb nieujemnych, więc jest nieujemna.
Jeśli więc $3 - y \geq 0$ i y jest liczbą naturalną, to $y \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
Dla $y = 0$: $|x - 2| + |-3| = 3$

$$|x - 2| = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Dla $y = 1$: $|x - 2| + |-2| = 2$

$$|x - 2| = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Dla y = 2 : $|x-2|+|-1|=1$

$|x-2|=0$

x – 2 = 0

x = 2

Dla y = 3 : $|x-2|+|0|=0$

$|x-2|=0$

x – 2 = 0

x = 2

Odpowiedź:

Pary (x;y) liczb naturalnych spełniających dane równanie, to (2;0) , (2;1) , (2;2) , (2;3)

II sposób

1) $x-2<0 \wedge y-3<0 \Rightarrow x<2 \wedge y<3$

$-(x-2)-(y-3)=3-y$

$-x+2-y+3=3-y$

$x=2$ sprzeczne z założeniem

2) $x-2<0 \wedge y-3\geq 0 \Rightarrow x<2 \wedge y\geq 3$

$-(x-2)+(y-3)=3-y$

$-x+2+y-3=3-y$

$y=\frac{1}{2}x+2$

$x<2 \wedge x\in N \Rightarrow x\in\{0,1\}$

$x=0 \wedge y=\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow y=2$ sprzeczne z założeniem

$x=1 \wedge y=\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow y=2\frac{1}{2}$ sprzeczne z założeniem

3) $x-2\geq 0 \wedge y-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \wedge y\geq 3$

$(x-2)+(y-3)=3-y$

$x-2+y-3=3-y$

$$y=-\frac{1}{2}x+4$$

$$y\geq 3\wedge y=-\frac{1}{2}x+4\Rightarrow -\frac{1}{2}x+4\geq 3\Rightarrow x\leq 2 \qquad x\leq 2\wedge x\geq 2\Rightarrow x=2$$

$$x=2\wedge y=-\frac{1}{2}x+4\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

4) $x-2\geq 0\wedge y-3<0\Rightarrow x\geq 2\wedge y<3$

$$(x-2)-(y-3)=3-y$$

$$x-2-y+3=3-y$$

$$x=2\wedge y<3\wedge y\in N\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}\vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}\vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Odpowiedź: Szukane pary to: $(2,0),(2,1),(2,2),(2,3)$

ZADANIE 2
I sposób

42 osoby w tym : n – pań oraz 42 – n panów.
A_1 - 7 panów , A_2 – 8 , A_3 – 9 , …. A_n – 42-n panów.
Liczba panów tworzy ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = 7$, r = 1 , $a_n = 42 - n$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 7 + (n - 1)\cdot 1 = 6 + n$
$42 - n = 6 + n$
$n = 18$

Odpowiedź: Na balu tańczyło 18 pań oraz 24 panów.

II sposób

Na balu było *n* pań oraz *m* panów ($n,m\in N_+$ i $n+m=42$ i $m\geq 9$)

A_1 - z 7 panami

A_2 - z 8 panami

A_3 - z 9 panami

Możemy przyjąć, że (A_n) jest ciągiem arytmetycznym, gdzie $A_1=7$, $r=1$, $A_n=m$

$$A_n = A_1 + (n-1)\cdot r$$

$$\begin{cases} m = 7 + n - 1 \\ m + n = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = n + 6 \\ n + 6 + n = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = n + 6 \\ 2n = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 18 \\ m = 24 \end{cases}$$

Odpowiedź: Na balu było 18 pań i 24 panów.

ZADANIE 3

I sposób

Niech a - długość boku rombu

α - kąt ostry rombu

d_1 , d_2 - przekątne rombu

$$P = a^2 sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

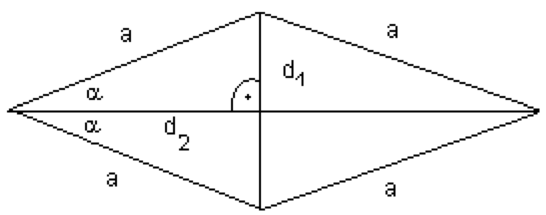
Jeśli długość boku rombu jest średnią geometryczną długości przekątnych ($a = \sqrt{d_1 d_2}$) to:

$$\left(\sqrt{d_1 d_2}\right)^2 sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

$$sin\alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 30^o$$

Odpowiedź: Kąty rombu mają miary 30^o oraz 150^o.

II sposób



$$a = \sqrt{d_1 d_2}$$

$$2\alpha = ?$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}d_1}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}d_2}{a}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\cdot\frac{d_1}{2a}\cdot\frac{d_2}{2a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d_1 d_2}{a^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{d_1 d_2}\right)^2}{a^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{a^2} = \frac{1}{2}$$

2α jest kątem ostrym i $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, a więc $2\alpha = 30^\circ$

Odpowiedź: Kąty rombu wynoszą 30° oraz 150°.

ZADANIE 4
I sposób

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}} = 1$$
$$\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}} = 1$$
$$\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right| + \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| + \sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}} = 1$$
$$-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3} + \sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}} = 1$$
$$\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}} = 1+\sqrt{2}-\sqrt{5} \qquad /^2$$ (ponieważ obie strony są nieujemne)
$$8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10} = \left(1+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2$$
$$8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10} = 8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}$$

L = P

II sposób

W rozwiązaniu skorzystamy ze wzorów skróconego mnożenia:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ oraz $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}} =$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3} + \sqrt{3-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} + \sqrt{1+2+5+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} =$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$\left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|+\left|1+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right|=$$

$$\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-\sqrt{5}=1$$

III sposób

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}=$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3}+\sqrt{3-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{1+2\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)+2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+5}=$$

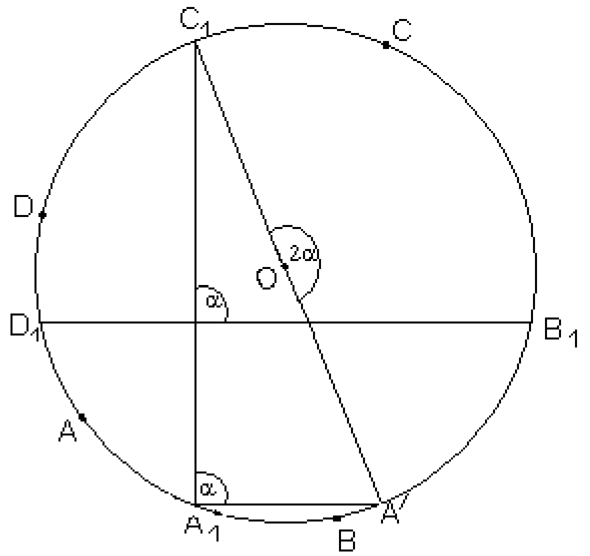
$$\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{1+2\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$\left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|+\left|1+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right|=$$

$$\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-\sqrt{5}=1$$

ZADANIE 5



Prowadzimy cięciwy A_1C_1 i B_1D_1, które przecinają się pod kątem α. Z jednego z końców, np. A_1 prowadzimy cięciwę A_1A' równoległą do drugiej cięciwy B_1D_1. Ponieważ $A_1A' \parallel B_1D_1$, więc $|\angle C_1A_1A'| = \alpha$ (kąty odpowiadające). Kąt środkowy oparty na łuku $A'C_1$ ma miarę 2α.

Obliczamy miarę łukową tego kąta: $2\alpha = \frac{A'C_1}{r}$, gdzie *r* jest promieniem okręgu, zaś $A'C_1$ długością łuku.

Punkt B_1 leży na łuku $A'C_1$, zatem $A'C_1 = A'B_1 + B_1C_1$.

Czworokąt $A'B_1D_1A_1$ jest trapezem wpisanym w okrąg, a więc jest trapezem równoramiennym. Wynika z tego, że $A'B_1 = A_1D_1$.

Z założenia A_1 jest środkiem łuku *AB*, a więc $A_1A = \frac{1}{2}AB$.

Analogicznie: D_1 jest środkiem łuku *DA*, więc $AD_1 = \frac{1}{2}DA$, B_1 jest środkiem łuku *BC*, więc $B_1C = \frac{1}{2}BC$, C_1 jest środkiem łuku *CD*, więc $CC_1 = \frac{1}{2}CD$.

A zatem

$$A'C_1 = A'B_1 + B_1C_1 = A_1D_1 + B_1C_1 = A_1A + AD_1 + B_1C + CC_1 = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}DA + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CD =$$

$$= \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r$$

$$2\alpha = \frac{A'C_1}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Udowodniliśmy, że cięciwy A_1C_1 i B_1D_1 przecinają się pod kątem prostym.