RODoN
Radomski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli

Zeszyt metodyczny

Edukacja matematyczna – IV etap edukacyjny

Scenariusze lekcji

26 - 600 RADOM, UL. SŁOWACKIEGO 17

Opracowanie zeszytu

dr Elżbieta Lodzińska
Katedra Matematyki Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego w Radomiu
mgr Piotr Darmas
Radomski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli

Wprowadzenie

W ramach współpracy między Uniwersytetem Technologiczno-Humanistycznym w Radomiu i Radomskim Ośrodkiem Doskonalenia Nauczycieli trwa projekt pilotażowy „Matematyczne szkoły ćwiczeń”.

Cele projektu

- Gromadzenie przez studentów doświadczeń związanych z: pracą opiekuńczo – wychowawczą z uczniami, pracą dydaktyczno – wychowawczą nauczyciela matematyki oraz konfrontowanie nabytej wiedzy z zakresu dydaktyki matematyki z rzeczywistością pedagogiczną w praktycznym działaniu, ćwiczenie umiejętności poprawnego prowadzenia lekcji matematyki.
- Popularyzowanie przez nauczycieli „dobrych praktyk”, dzielenie się wiedzą i doświadczeniem zawodowym.
- Rozwijanie aktywności matematycznej uczniów.
- Proponowanie działań wpływających na efektywność nauczania w zakresie edukacji matematycznej.
- Wzbogacenie bazy pomocy dydaktycznych „szkół ćwiczeń”.
- Rozwój współpracy między UTH i szkołami radomskimi.

Sposób realizacji projektu

<u>Studenci:</u>
- odbywają praktyki wg programu praktyk opracowanego przez uczelnianego opiekuna praktyk,
- uczestniczą w pracach szkoły wg harmonogramu opracowanego przez szkolnego opiekuna praktyk,
- zapoznają się z aktualnie realizowaną przez nauczyciela matematyki podstawą programową , rozkładem materiału nauczania matematyki dla danej klasy,
- uczestniczą w obserwacji lekcji matematyki,
- zdobywają umiejętności stosowania wiedzy z zakresu dydaktyki matematyki w trakcie przygotowywania się do prowadzenia lekcji matematyki,
- omawiają przeprowadzone przez siebie lekcje ze szkolnym opiekunem praktyk,
- włączają się w organizację zajęć pozalekcyjnych,

<u>Nauczyciele i pracownicy uczelni:</u>
- opracowują program i harmonogram praktyk,
- omawiają obserwowane i prowadzone przez studentów zajęcia,
- przekazują informacje związane z organizacją warsztatu pracy nauczyciela matematyki,
- organizują zajęcia i wykłady otwarte dla nauczycieli placówek nie objętych projektem,
- uczestniczą w różnych formach doskonalenia zawodowego,
- proponują formy zajęć pozalekcyjnych współorganizowane przez studentów i uczniów np. Maraton Maturalny, Dzień liczby Pi, Dzień gier matematycznych,
- upowszechniają tzw. „dobre praktyki” wypracowane w ramach projektu.

Studenci Kierunku Matematyka :
Barbara Bednarek
Karolina Grotek
Adrian Gryza
Lena Królikowska
Kamila Lipińska
Monika Miękus
Agnieszka Peryt
Paulina Sarnowska
odbywali ćwiczenia z zakresu Dydaktyki Matematyki i Praktyki Pedagogiczne i dydaktyczne w IV Liceum Ogólnokształcącym w Radomiu.

Prezentujemy scenariusze lekcji przygotowane i przeprowadzone przez studentów do wybranych tematów i działów programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum (funkcje, ciągi liczbowe, trygonometria, planimetria).

Scenariusze zachowują formę opracowaną przez daną osobę i są materiałem do refleksji i dyskusji.

Mogą być przedmiotem dyskusji nad planowaniem realizacji programu nauczania pomiędzy nauczycielem stażystą lub kontraktowym i opiekunem stażu.

Mogą służyć dyskusji nad sposobem przygotowywania zajęć i realizacji podstawy programowej z zakresu edukacji matematycznej podczas spotkań zespołów przedmiotowych.

Będziemy również wdzięczni za wszelkie uwagi kierowane bezpośrednio do Radomskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli.

dr Elżbieta Lodzińska
mgr Piotr Darmas

Wstęp

Pozytywne efekty uzyskiwane w nauczaniu matematyki zależą m.in. od wykształcenia nauczycieli, ich postawy dydaktycznej, zaangażowania, indywidualnego stosunku do każdego ucznia. Mówiąc o kompetencjach nauczycieli należy przeanalizować , jaką przeszli drogę do uzyskania dyplomu nauczyciela matematyki.

Już w trakcie przygotowywania studenta do zawodu potrzebne jest zaangażowanie odpowiednich placówek oświatowych i ich doświadczonych pedagogów. Należy unormować sposób kształcenia przyszłych nauczycieli, szczególnie w zakresie praktycznym – potrzebne są szkoły ćwiczeń . Nigdzie lepiej nie da się przygotować nauczycieli do pracy, jak w szkole, w której student może się zetknąć z prawdziwymi problemami dydaktycznymi i wychowawczymi. Ze względu na ten niezaprzeczalny fakt, nasza Uczelnia regularnie podpisuje umowy o współdziałaniu ze szkołami w zakresie kształcenia nauczycieli.

Współpraca z IV LO im. T. Chałubińskiego w Radomiu oraz z Radomskim Ośrodkiem Doskonalenia Nauczycieli pomogła w ostatnich latach przygotować praktycznie studentów Uniwersytetu Technologiczno - Humanistycznego kierunku Matematyka do zawodu nauczyciela matematyki.

W czasie zajęć z dydaktyki matematyki oraz podczas praktyk pedagogicznych i dydaktycznych studenci uczyli się dostosowywania różnych metod pracy nauczyciela matematyki do możliwości intelektualnych uczniów.

Doświadczeni nauczyciele zawsze twierdzili, opierając się na swoim długoletnim doświadczeniu, że matematyki można nauczyć mając do dyspozycji tylko kredę i tablicę, ale pod warunkiem, że w procesie nauczania uczestniczą uczniowie z „otwartymi głowami”, chętni do podjęcia wysiłku intelektualnego, świadomi dobrodziejstw płynących z umiejętności logicznego myślenia, świadomi, jakie korzyści daje rozwijanie intelektu.

Ważne jest więc, aby studenci mogli się uczyć jak nawiązywać jak najlepszy kontakt z uczniami, jak dobrać metodę nauczania w danym momencie procesu dydaktycznego. Trudno wyobrazić sobie obecnie proces kształcenia bez udziału środków interaktywnych, ale powinny one pełnić jedynie rolę wspomagającą pracę nauczyciela, szczególnie nauczyciela matematyki. Zapobieganie niepowodzeniom, ich likwidowaniu i podnoszeniu efektywności pracy szkolnej dobrze służą różnorodne koncepcje unowocześniania procesu dydaktycznego. B.Strychniewicz uważa, że aktywizowanie uczniów różnymi metodami, np. przez stosowanie nowoczesnych środków dydaktycznych (w tym komputera i Internetu) powoduje pobudzenie do działania i głębszego przeżywania treści kształcenia. Dlatego powszechnie stosuje się nauczanie „wspomagane komputerowo”. Ale przed nauczycielem staje trudne zadanie – jak wyznaczyć środek ciężkości pracy dydaktycznej, który będzie stymulował do efektywnej nauki nie czyniąc z uczniów ludzi wykształconych algorytmicznie, lecz umiejących podejmować wyzwania intelektualne, umiejących samodzielnie dochodzić do wiedzy i potrafić ją stosować. Tym ważkim problemom współczesnej edukacji dużo miejsca w swych publikacjach poświęcili T.Lewowicki, B.Siemieniecki, J.Morbitzer. Studenci zapoznawali się teoretycznie z tymi zagadnieniami na zajęciach z dydaktyki matematyki, zaś praktycznie w kontakcie z uczniami w czasie prowadzonych w szkole lekcji.

E.Gruszczyk – Kolczyńska sugeruje, że nauczyciel powinien już na początku swoich kontaktów szkolnych zadbać o ukształtowanie zachowań umożliwiających współpracę, wyciszenie lękowych nastawień uczniów do zadań wymagających wysiłku intelektualnego.

Współczesny nauczyciel każdego przedmiotu musi być należycie wykształcony – posiadać wiedzę merytoryczną przedmiotu, ale także jak najbogatszy warsztat pracy dydaktycznej, pedagogicznej, psychologicznej. Nauczyciel musi umieć elastycznie reagować na zachowania uczniów, musi być entuzjastą tego, co robi, zdawać sobie sprawę z tego, że złe emocje w procesie dydaktycznym obniżają efektywność nauczania matematyki. Nie można tego osiągnąć tylko na podbudowie teoretycznej, wiadomo, że „wprawa czyni mistrza”, więc kontakt przyszłego nauczyciela – studenta matematyki z żywą tkanką szkolną, jaką są uczniowie, jest nieodzowny.

dr Elżbieta Lodzińska

Bibliografia

E. Gruszczyk – Kolczyńska *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki.* Warszawa 1997 WSiP

E. Gruszczyk-Kolczyńska: "Dziecięca matematyka," Warszawa, 1997 WSiP

K. Obuchowski *Kody orientacji i struktura procesów emocjonalnych.* Warszawa 1982 PWN

B. Strychniewicz *Praca z uczniem mającym trudności z matematyką.* Opole 2004, NOWIK

J. Morbotzer *Interakcja człowiek – Internet – refleksje pedagogiczne.* w Komputer w edukacji. Kraków 2009. Wydawnictwo Akademii Pedagogicznej w Krakowie

J. Morbitzer *Edukacja wspierana komputerowo a humanistyczne wartości pedagogiczne.* Kraków 2007, Wydawnictwo Akademii Pedagogicznej w Krakowie

T. Lewowicki, B. Siemieniecki *Media w edukacji – szanse i zagrożenia.* Toruń 2008, Wydawnictwo A. Marszałek

E. Lodzińska *Edukacja matematyczna a komputery.* w. Komputer w edukacji. Kraków 2008.str. 128-133, Wydawnictwo Akademii Pedagogicznej w Krakowie

E. Lodzińska *Nowe wyzwania w pracy nauczyciela matematyki.* W. Edukacja ustawiczna dorosłych. Radom 4/2014, str 196 Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji Radom

Klasa 1

Temat: Sposoby opisywania funkcji.

Cele:
- uczeń podaje definicję funkcji,
- uczeń podaje definicję dziedziny funkcji,
- uczeń podaje definicję przeciwdziedziny funkcji,
- uczeń podaje sposoby, które stosujemy do opisywania funkcji
- uczeń stosuje sposoby opisywania funkcji w zadaniach,

Metoda:
- ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:
- „Matematyka 1 LO podręcznik” E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab
- „Matematyka. Klasa 1. Zbiór zadań - szkoła ponadgimnazjalna”
E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab,

Część wykładowa	
Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
1. Nauczyciel przygotowuję się do lekcji: • sprawdza listę obecności, • podaje temat uczniom, • rozdaję zadania,	1. Uczniowie przygotowują się do lekcji: • zajmują miejsca, • przygotowują książki i przybory szkolne,
2. Nauczyciel określa czym klasa będzie zajmowała się na lekcji i zaczyna część powtórzeniową, w której zadaje pytania uczniom.	2. Uczniowie odpowiadają na pytania.
• Co to jest funkcja?	• Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y (zbiory X i Y są niepuste) nazywamy takie odwzorowanie, w którym każdemu elementowi ze zbioru X został przyporządkowany tylko jeden element ze zbioru Y.
• Co to jest dziedzina?	• Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f, a jego elementy argumentami funkcji f.
• Co to jest przeciwdziedzina?	• Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f. Zbiór tych elementów ze zbioru Y, które zostały przypisane elementom ze zbioru X, nazywamy zbiorem wartości funkcji f.
• Jakie są najczęstsze sposoby które stosujemy do opisywania funkcji?	• Najczęstszymi sposobami, które stosujemy do opisywania funkcji, są: 1. Opis słowny

2. Tabelka
3. Graf
4. Zbiór par uporządkowanych
5. Wzór
6. Wykres

Część ćwiczeniowa

Czynności nauczyciela	Czynności ucznia

Czynności nauczyciela

I. Nauczyciel wybiera osoby które rozwiązują zadania na tablicy. (Ilość wykonanych zadań zależy od tempa pracy uczniów)

Zadanie 1/215 (Podręcznik)

Narysuj wykres funkcji f, opisanej za pomocą tabelki:

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0

a) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość równą -2?
b) Jaką wartość funkcja przyjmuje dla argumentu 1?
c) Wypisz wszystkie argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości większe od -3.

Zadanie 2/215 (Podręcznik)

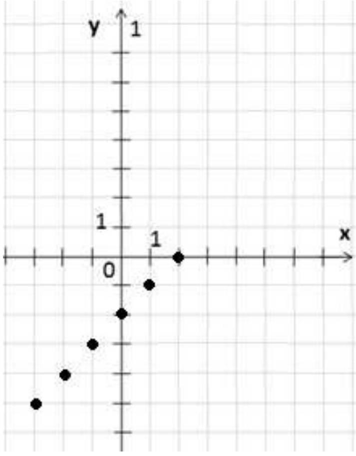
Skonstruuj graf funkcji $y = f(x)$:

a) $f(x) = \sqrt{x} - 1$, jeśli $x \in \{0,1,4,9\}$
b) $f(x) = 0{,}2 \cdot x$, jeśli $x \in \{-5,-1,0,1,5,10\}$

Czynności ucznia

I. Wskazani uczniowie rozwiązują zadania na tablicy, a reszta klasy w zeszytach.

Zadanie 1/215 (Podręcznik)



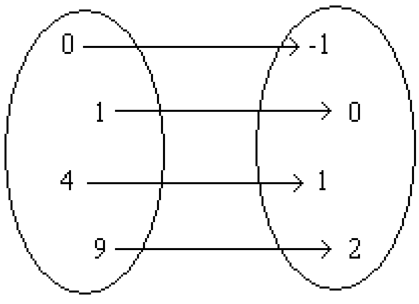
a) $f(x) = -2$ dla $x = 0$
b) $f(1) = -1$
c) $f(x) > -3$ dla $x \in \{0,1,2\}$

Zadanie 2/215 (Podręcznik)

a)
tabelka pomocnicza:

x	0	1	4	9
f(x)	-1	0	1	2

graf: $f: X \longrightarrow Y$



b)
tabelka pomocnicza:

Zadanie 3/215 (Podręcznik)

Podaj wzór funkcji g, opisanej za pomocą zbioru par uporządkowanych:

a) $\{(4,3),(3,2),(2,1),(1,0)\}$

b) $\{(-3,3),(-1,1),(0,0),(1,-1),(2,-2)\}$

Zadanie 4/215 (Podręcznik)

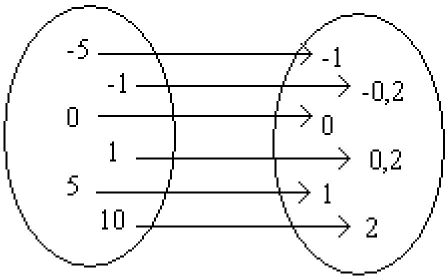
Narysuj wykres funkcji f, opisanej za pomocą wzoru:

a) $f: x \to 3-x$, jeśli $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$

b) $f: x \to \frac{1}{2}x^2$, jeśli $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$

x	-5	-1	0	1	5	10
f(x)	-1	-0,2	0	0,2	1	2

graf: $f: X \longrightarrow Y$



Zadanie 3/215 (Podręcznik)

a) $g(x) = x-1$, gdy $x \in \{1,2,3,4\}$

b) $g(x) = -x$, gdy $x \in \{-3,-1,0,1,2\}$

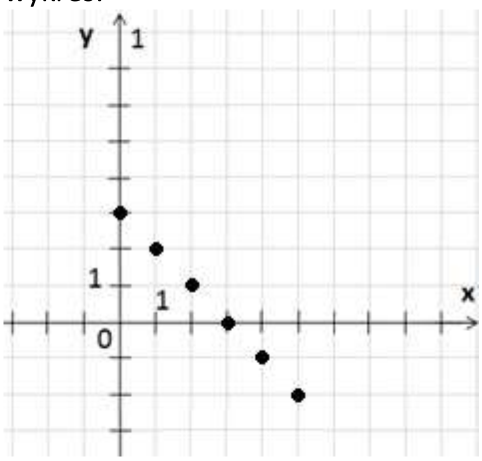
Zadanie 4/215 (Podręcznik)

a)

tabelka pomocnicza:

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	3	2	1	0	-1	-2

wykres:



b)

tabelka pomocnicza:

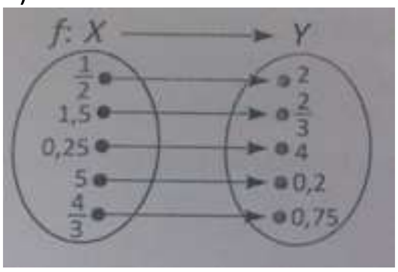
x	-2	-1	0	1	2
f(x)	2	0,5	0	0,5	2

wykres:

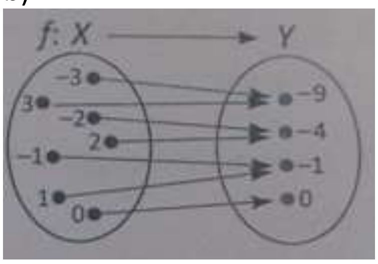
Zadanie 8.7/172 (Zbiór zadań)

Poniżej przedstawiony jest graf pewnej funkcji f. Podaj wzór tej funkcji.

a)



b)



Zadanie 8.8/172 (Zbiór zadań)

Dana jest funkcja, opisana za pomocą tabelki. Podaj wzór tej funkcji.

a)

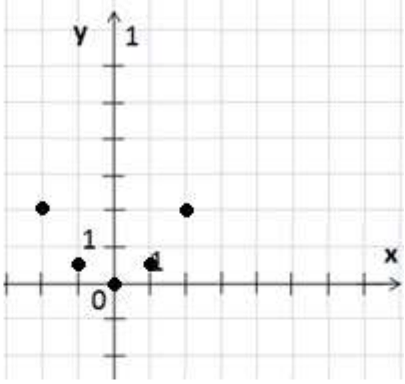
x	-4	-2,5	-2	-1	0	3
y	-8	-5	-4	-2	0	6

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1

Zadanie 8.9/173 (Zbiór zadań)

Dana jest funkcja f. Podaj opis słowny tego



Zadanie 8.7/172 (Zbiór zadań)

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, gdy $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, 5, \frac{4}{3}\}$

b) $f(x)=-x^2$, gdy $x \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

Zadanie 8.8/172 (Zbiór zadań)

a) $y=2x$, gdy $x \in \{-4;-2,5;-2;-1;0;3\}$

b) $y=x-4$, gdy $x \in \{-2,-1,0,1,2,3\}$

Zadanie 8.9/173 (Zbiór zadań)

a) Każdej liczbie ze zbioru $\{0,1,4,9,16\}$ przyporządkowujemy jej pierwiastek kwadratowy.

b) Każdej liczbie ze zbioru $\{-\frac{1}{2};4,5;\frac{3}{4};11\}$

przyporządkowania. a) $f : x \to \sqrt{x}$, gdzie $x \in \{0,1,4,9,16\}$ b) $f : x \to \frac{1}{x}$, gdzie $x \in \{-\frac{1}{2};4,5;\frac{3}{4};11\}$ c) $f : x \to -x$, gdzie $x \in \{-10,-8,-4,6,8\}$ d) $f : x \to 0,5x$, gdzie $x \in \{\frac{1}{3},\frac{4}{5},6,8\}$ II. Nauczyciel podaję pracę domową (Zadanie 8.10, 8.11, 8.12/173 (Zbiór zadań)).	przyporządkowujemy jej odwrotność. c) Każdej liczbie ze zbioru $\{-10,-8,-4,6,8\}$ przyporządkowujemy liczbę do niej przeciwną. d) Każdej liczbie ze zbioru $\{\frac{1}{3},\frac{4}{5},6,8\}$ przyporządkowujemy liczbę dwa razy od niej mniejszą. II. Uczniowie zapisują pracę domową.

Klasa 1

Temat: Własności funkcji – zadania.

Typ lekcji: ćwiczeniowa,
Czas trwania zajęć: 1 godzina lekcyjna (45 minut).

CELE NAUCZANIA
Cel ogólny :
- odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu,
- szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach.

Cele szczegółowe :
Uczeń:
- odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje wartość najmniejszą lub największą)
- określa na podstawie wykresu funkcji czy funkcja jest różnowartościowa
- odczytuje na podstawie wykresu zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne),
- szkicuje wykres funkcji o zadanych własnościach.

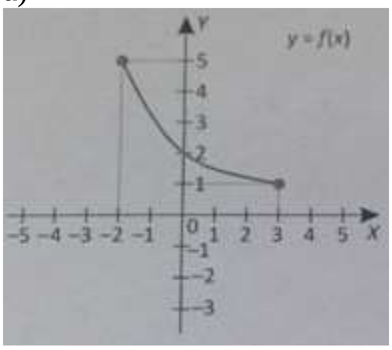
Cele wychowawcze:
- Rozwijanie umiejętności poprawnego formułowania myśli.

Metody pracy:
- Metoda treningowa – rozwiązywanie zadań.

Formy pracy:
- Indywidualna,
- Praca z całą klasą.

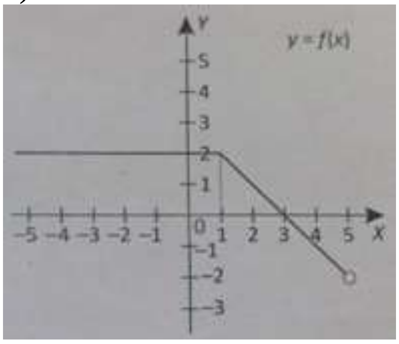
Środki dydaktyczne:
-„Matematyka Podręcznik i Zbiór zadań do liceów i techników klasa 1" (Oficyna Edukacyjna* Krzysztof Pazdro),
- Zeszyty,
- Tablica, kreda.

Przebieg lekcji

Ogniwo lekcji	Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
1.Czynności Organizacyjne	Sprawdza obecność uczniów na lekcji.	Zgłaszają nieobecność kolegów.
2.Część wstępna: a) zapoznanie z celami lekcji b)sformułowanie tematu lekcji c) wprowadzenie wiadomości	a) Celem dzisiejszej lekcji jest zdobycie umiejętności odczytywania własności funkcji na podstawie jej wykresu. b) Podaje temat „Własności funkcji – zadania”. c) Na podstawie wykresu funkcji możemy określić jej własności takie jak: **1) Dziedzina funkcji.** **2) Zbiór wartości funkcji.** **3) Miejsca zerowe funkcji.** **4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).** **5) Przedziały monotoniczności funkcji.** **6) Różnowartościowość funkcji.** **7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.**	a) Analizuje czego będzie dotyczyła lekcja. b) Zapisuje temat lekcji. c) Sporządza notatki wykorzystując zapisy na tablicy.
3. Część główna: a)rozwiązywanie zadań na tablicy	a)Kontroluje prace uczniów i koryguje błędy.	a) Rozwiązuje zadania na tablicy. Zapisuje rozwiązania w zeszytach.
	Zadanie 1. Na poniższym rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu własności tej funkcji. a) 	Zadanie 1. Rozwiązanie: a) **1) Dziedzina funkcji.** $D_f = <-2,3>$ **2) Zbiór wartości funkcji.** $ZW_f = <1,5>$ **3) Miejsca zerowe funkcji.** Brak miejsc zerowych. **4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).** $f(x) > 0$ dla $x \in <-2,3>$ **5) Przedziały monotoniczności funkcji.** funkcja jest malejąca w przedziale $<-2,3>$ **6) Różnowartościowość funkcji.** Funkcja jest różnowartościowa. **7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.**

Funkcja osiąga wartość największą 5 dla $x=-2$ oraz wartość najmniejszą 1 dla $x=3$

b)



b) **1) Dziedzina funkcji.**

$D_f=(-\infty,5)$

2) Zbiór wartości funkcji.

$ZW_f=(-2,2>$

3) Miejsca zerowe funkcji.

$f(x)=0$ dla $x=3$

4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).

$f(x)>0$ dla $x\in(-\infty,3)$

$f(x)<0$ dla $x\in(3,5)$

5) Przedziały monotoniczności funkcji.

funkcja jest stała w przedziale $(-\infty,1>$

funkcja jest malejąca w przedziale $<1,5)$

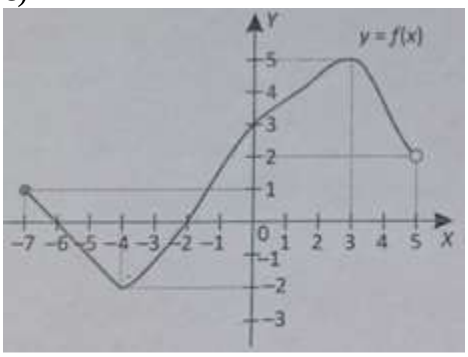
6) Różnowartościowość funkcji.

Funkcja nie jest różnowartościowa.

7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.

Funkcja osiąga wartość największą 2 dla $x\in(-\infty,1>$, brak wartość najmniejszej

c)



c) **1) Dziedzina funkcji.**

$D_f=<-7,5)$

2) Zbiór wartości funkcji.

$ZW_f=<-2,5>$

3) Miejsca zerowe funkcji.

$f(x)=0$ dla $x=-6$ oraz $x=-2$

4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).

$f(x)>0$ dla $x\in<-7,-6)\cup(-2,5)$

$f(x)<0$ dla $x\in(-6,-2)$

5) Przedziały monotoniczności funkcji.

funkcja jest rosnąca w przedziale $<-4,3>$

funkcja jest malejąca w przedziale $<-7,-4>$ oraz w przedziale $<3,5)$

6) Różnowartościowość funkcji.

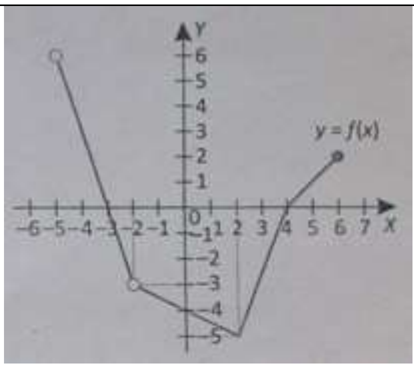
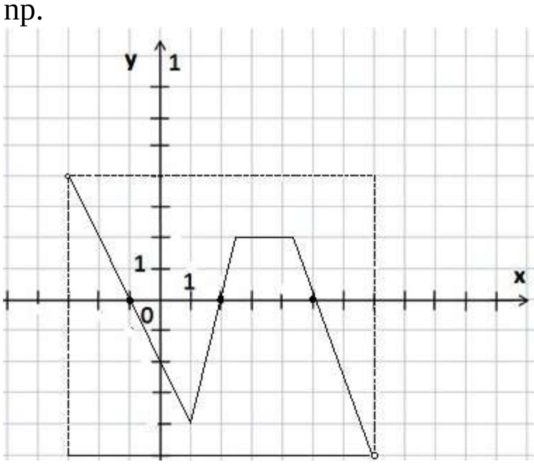
Funkcja nie jest różnowartościowa.

7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.

Funkcja osiąga wartość największą 5 dla $x=3$ oraz wartość najmniejszą -2 dla $x=-4$

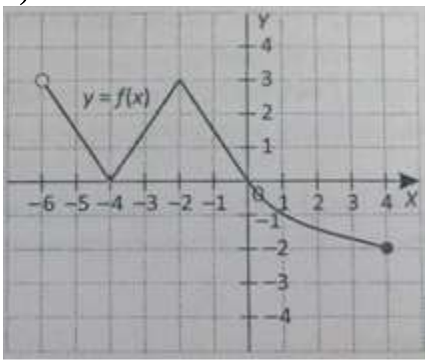
d)

d) **1) Dziedzina funkcji.**

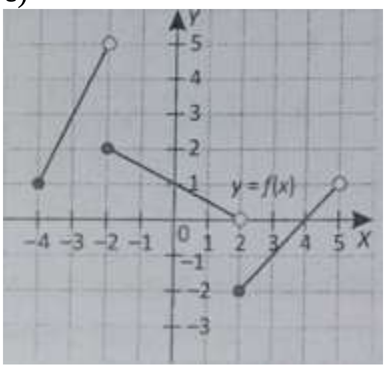
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td>$D_f = (-5,-2) \cup (-2,6>$
2) Zbiór wartości funkcji.
$ZW_f =<-5,6)$
3) Miejsca zerowe funkcji.
$f(x)=0$ dla $x=-3$ oraz $x=4$
4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).
$f(x)>0$ dla $x \in (-5,-3) \cup (4,6>$
$f(x)<0$ dla $x \in (-3,-2) \cup (-2,4)$
5) Przedziały monotoniczności funkcji.
funkcja jest rosnąca w przedziale $<2,6>$
funkcja jest malejąca w przedziale $(-5,-2)$ oraz w przedziale $(-2,2>$
6) Różnowartościowość funkcji.
Funkcja nie jest różnowartościowa.
7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.
Funkcja osiąga wartość najmniejszą -5 dla $x=2$, brak wartości największej.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Zadanie 2.
W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy dwóch funkcji, z których każda spełnia jednocześnie następujące warunki:
- Dziedziną funkcji jest przedział $(-3,7)$.
- Zbiorem wartości funkcji jest przedział $<-5,4)$.
- Funkcja ma trzy miejsca zerowe: $-1, 2, 5$.</td>
<td>Zadanie 2.
Rozwiązanie:
np.

</td>
</tr>
</table>

Zadanie 3.
Poniżej przedstawione są wykresy pewnych funkcji. Omów własności tych funkcji.

d)



e)



Zadanie 3.
Rozwiązanie:

d) **1) Dziedzina funkcji.**

$D_f = (-6,4>$

2) Zbiór wartości funkcji.

$ZW_f = <-2,3>$

3) Miejsca zerowe funkcji.

$f(x) = 0$ dla $x = -4$ oraz $x = 0$

4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).

$f(x) > 0$ dla $x \in (-6,-4) \cup (-4,0)$

$f(x) < 0$ dla $x \in (0,4>$

5) Przedziały monotoniczności funkcji.

funkcja jest rosnąca w przedziale $<-4,-2>$

funkcja jest malejąca w przedziale $(-6,-4>$ oraz w przedziale $<-2,4>$

6) Różnowartościowość funkcji.

Funkcja nie jest różnowartościowa.

7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.

Funkcja osiąga wartość największą 3 dla $x = -2$ oraz wartość najmniejszą -2 dla $x = 4$

e) **1) Dziedzina funkcji.**

$D_f = <-4,5)$

2) Zbiór wartości funkcji.

$ZW_f = <-2,5)$

3) Miejsca zerowe funkcji.

$f(x) = 0$ dla $x = 4$

4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).

$f(x) > 0$ dla $x \in <-4,2) \cup (4,5)$

$f(x) < 0$ dla $x \in <2,4)$

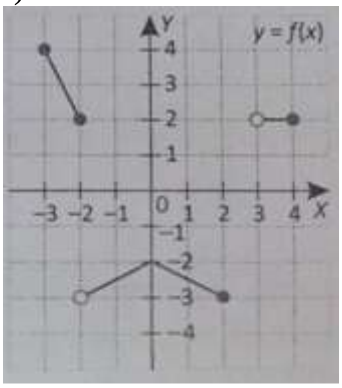
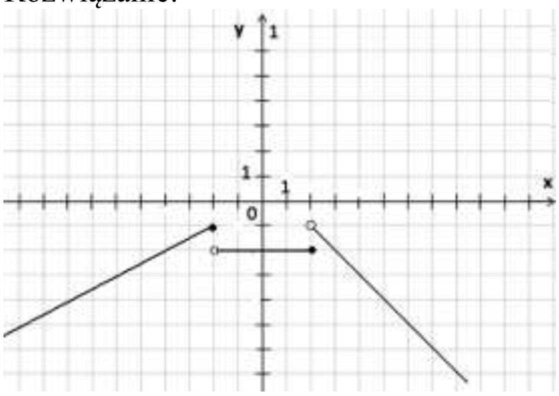
5) Przedziały monotoniczności funkcji.

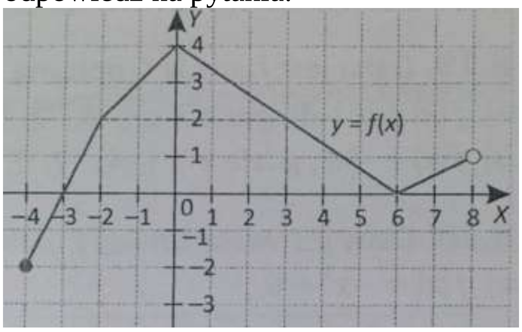
funkcja jest rosnąca w przedziale $<-4,-2)$ oraz w przedziale $<2,5)$

funkcja jest malejąca w przedziale $<-2,2)$

6) Różnowartościowość funkcji.

Funkcja nie jest różnowartościowa.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>f)

</td>
<td>7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.
Funkcja osiąga wartość najmniejszą -2 dla $x=2$, brak wartości największej.
f) 1) Dziedzina funkcji.
$D_f = <-3,2> \cup (3,4>$
2) Zbiór wartości funkcji.
$ZW_f = <-3,-2> \cup <2,4>$
3) Miejsca zerowe funkcji.
brak miejsc zerowych
4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).
$f(x)>0$ dla $x \in <-3,-2> \cup (3,4>$
$f(x)<0$ dla $x \in (-2,2>$
5) Przedziały monotoniczności funkcji.
funkcja jest rosnąca w przedziale $(-2,0>$
funkcja jest malejąca w przedziale $<-3,-2>$ oraz w przedziale $<0,2>$
funkcja jest stała w przedziale $(3,4>$
6) Różnowartościowość funkcji.
Funkcja nie jest różnowartościowa.
7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.
Funkcja osiąga wartość największą 4 dla $x=-3$ oraz wartość najmniejszą -3 dla $x=2$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Zadanie 4.
Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie na jego podstawie omów własności funkcji f:
d)
$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x, & jesli \quad x \in (-\infty,-2> \\ -2, & jesli \quad x \in (-2,1> \\ -x, & jesli \quad x \in (1,+\infty) \end{cases}$</td>
<td>Zadanie 4.
Rozwiązanie:

1) Dziedzina funkcji.
$D_f = R$
2) Zbiór wartości funkcji.</td>
</tr>
</table>

		$ZW_f=(-\infty,-1>$ **3) Miejsca zerowe funkcji.** brak miejsc zerowych **4) Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne).** $f(x)<0$ dla $x\in D_f$ **5) Przedziały monotoniczności funkcji.** funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty,-2>$ funkcja jest malejąca w przedziale $(1,+\infty)$ funkcja jest stała w przedziale $(-2,1>$ **6) Różnowartościowość funkcji.** Funkcja nie jest różnowartościowa. **7) Najmniejsza oraz największa wartość funkcji.** Funkcja osiąga wartość największą -1 dla $x=-2$ wartości najmniejszej brak
	Zadanie 5. Na postawie wykresu funkcji odpowiedz na pytania:  a) Jaka jest dziedzina i zbiór wartości funkcji f? b) Dla jakich argumentów wartość funkcji f wynosi 2? c) W jakim przedziale funkcja f jest rosnąca? d) Dla jakiego argumentu wartość funkcji f jest największa? Ile wynosi największa wartość funkcji?	Zadanie 5. Rozwiązanie: a) $D_f=<-4,8)$ $ZW_f=<-2,4>$ b) $y=2$ dla $x=-2$ oraz $x=3$ c) funkcja rośnie w przedziale $<-4,0>$ oraz $<6,8)$ d) wartość największa wynosi 4 dla $x=0$.
4.Część końcowa: a)Podsumowanie lekcji	a)Zadaje pytania związane z tematem lekcji i ocenia aktywność uczniów.	a)Odpowiada na pytania dotyczące tematu lekcji.

Klasa 1

Temat: Najmniejsza i największa wartość funkcji.

Czas trwania: 1 jednostka lekcyjna (45 minut).

Ogólne cele edukacyjne i wychowawcze:

- kształtowanie wytrwałości w zdobywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych,
- nabywanie umiejętności precyzyjnego formułowania wypowiedzi,
- pielęgnowanie dbałości o estetykę (czytelny rysunek, poprawny zapis informacji).

Cele szczegółowe edukacyjne (wiadomości i umiejętności):

- uczeń oblicza wartość funkcji dla danego argumentu i argument, któremu przyporządkowana jest podana wartość,
- uczeń odczytuje z wykresu wartość funkcji dla danego argumentu

  i potrafi wyznaczyć zbiór wartości dla danej dziedziny funkcji,
- uczeń stosuje pojęcie najmniejszej i największej wartości funkcji.

Metody:

- podająca-dyskusyjna,
- ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- wprowadzająco- powtórzeniowa.

Środki dydaktyczne:

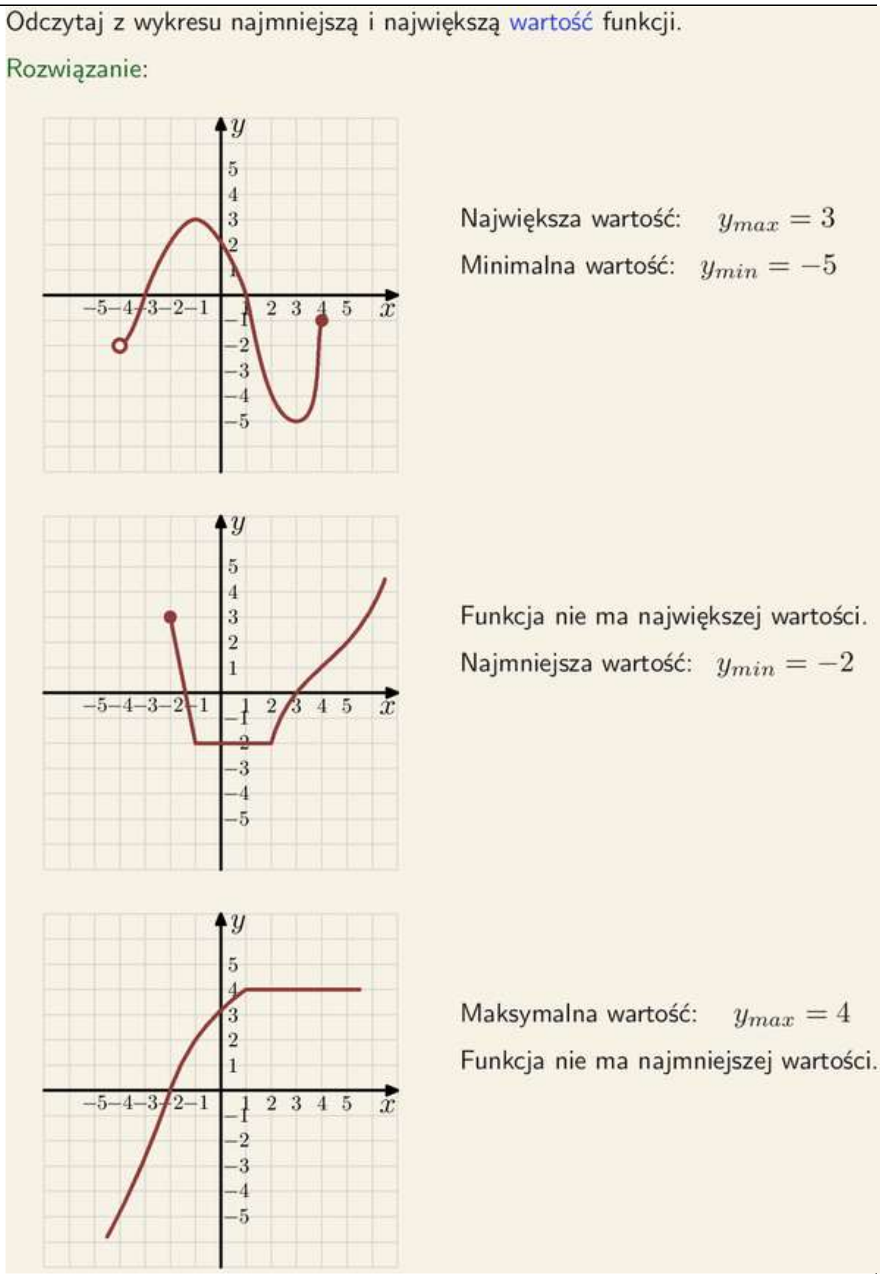
- Matematyka - podręcznik i zbiór zadań do liceów i techników. Klasa I. Zakres podstawowy. M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda. Oficyna edukacyjna – K. Pazdro.

Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
1. Sprawdzenie listy obecności. **2.** Sprawdzenie ilościowo pracy domowej. **3.** Zapisanie tematu lekcji na tablicy. **4.** Podyktowanie notatki: Definicje największej i najmniejszej wartości funkcji. Minimum to najmniejsza wartość funkcji. Maksimum to największa wartość funkcji.	**1**.Przygotowanie zeszytów i przyborów szkolnych. **2**.Zapisanie tematu lekcji w zeszycie. **3**.Uczniowie zapisują notatkę do zeszytu. Funkcja $f : X \to Y$ przyjmuje **wartość największą** $y_0 = f(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność $f(x) \leq f(x_0)$. Funkcja $f : X \to Y$ przyjmuje **wartość najmniejszą** $y_0 = f(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność $f(x) \geq f(x_0)$.

5. Rozwiązywanie przykładów przy tablicy.	**4.** Uczniowie podchodzą kolejno do tablicy.
Przykład.1. Wyznaczenie najmniejszej i największej wartości funkcji ze wzoru na podstawie konkretnego przedziału.	**Przykład.1.** f(x)= -2*x +4 dla $x \in < -1,1 >$ końcowe argumenty z przedziału podstawiamy do wzoru funkcji za x i wyliczamy y. f(-1) = (-2)*(-1) + 4 = 6 f(1) = (-2)*1 + 4 = 2 Min = 2 Max = 6
Przykład.2. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=2x^2+7$ dla $x \in \{-2;-1;0;1;2\}$.	**Przykład.2.** W takim przypadku zbiór wartości określamy zawsze podstawiając wszystkie x-sy (argumenty) do wzoru, wyniki to zbiór wartości. $f(-2)=2\cdot(-2)^2+7=2\cdot4+7=15$ $f(-1)=2\cdot(-1)^2+7=2\cdot1+7=9$ $f(0)=2\cdot0^2+7=2\cdot0+7=7$ $f(2)=2\cdot2^2+7=2\cdot4+7=15$ $f(1)=2\cdot1^2+7=2\cdot1+7=9$ Odpowiedź: Zbiór wartości wynosi ZW={7;9;15}
Przykład.3. Dana jest funkcja określona wzorem: $f(x)=\lvert x\rvert$, znajdź max i min tej funkcji.	**Przykład.3.** Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną. Zatem zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór D = <0 ; ∞) Funkcja osiąga wartość najmniejszą równą 0 dla argumentu x = 0, wartości największej funkcja ta nie osiąga.
Przykład.4. Odczytywanie minimum i maksimum wartości funkcji z wykresu:	**Przykład.4.**

Przykład.5.

Odczytywanie minimum i maksimum wartości funkcji z wykresu:



Przykład.5.

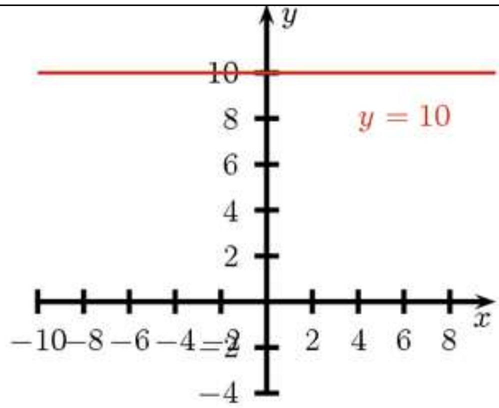
Funkcja $y = 10$ posiada zarówno wartość największą jak i najmniejszą. Wartością najmniejszą jest $y_{min} = 10$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wartością największą jest także $y_{max} = 10$ i także dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykład.6.

Odczytywanie minimum i maksimum wartości funkcji z wykresu:

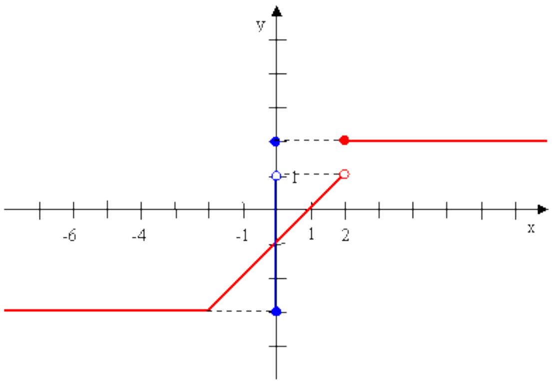
Podsumowanie przez nauczyciela:
Pytania do uczniów na temat dzisiejszej lekcji.
Odpowiedzi na ewentualne pytania uczniów.

Zadanie pracy domowej ze zbioru zadań.



W dowolnym niepustym przedziale (nawet otwartym), wartością najwyższa i najniższą będzie także 10.

Przykład.6.



Zbiorem wartości funkcji jest zbiór ZW = <-3 ; 1) i {2}
Funkcja osiąga wartość największą równą 2 dla argumentów x ∈ <2 ; ∞), a wartość najmniejszą równą -3 dla argumentów

x ∈ (-∞ ; -2>

Wskazany uczeń odpowiada.

Klasa 1

Temat: Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażanych w postaci wykresu funkcji.

Czas: Dwie godziny lekcyjne.

Cele:

- utrwalenie znajomości własności funkcji,
- zastosowanie własności funkcji do opisu różnych zjawisk z otaczającej nas rzeczywistości,
- odczytywanie znanych własności funkcji z jej wykresu,
- kształtowanie świadomość z korzyści płynących z graficznego przedstawiania zjawisk,
- analizowanie różnych zjawisk i procesów za pomocą modelu graficznego;

Metody:

- metoda podająca (pogadanka),
- rozmowa kierowana,
- metoda ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- powtórzeniowo-ćwiczeniowa.

Środki dydaktyczne:

- Podręcznik do liceów i techników – Matematyka Klasa 1 – Marcin Kurbacz, Elżbieta Kurbacz i Elżbieta Świda, zakres podstawowy – Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro.
- Zbiór zadań do liceów i techników – Matematyka Klasa 1 – Marcin Kurbacz, Elżbieta Kurbacz i Elżbieta Świda, zakres podstawowy – Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro.

<table>
<tr><th>Nauczyciel</th><th>Uczeń</th></tr>
<tr><td colspan="2">Czynności wstępne</td></tr>
<tr><td>1. Sprawdzenie listy obecności.

2. Nauczyciel podaje temat lekcji.</td><td>1. Przygotowanie zeszytów i przyborów szkolnych.

2. Uczniowie zapisują temat lekcji w zeszytach.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Część Praktyczna</td></tr>
<tr><td>Nauczyciel rozpoczyna lekcje od wyjaśnienia celu tej lekcji i następnie przechodzi do omówienia przykładów znajdujących się na str. 250 w podręczniku:

Przykład 1. (biologia)
Str. 250
Nauczyciel przerysowuje rysunek z podręcznika i zadaje pytania uczniom:
• Co nazywamy stężeniem dwutlenku siarki w powietrzu?
• Co jest jednostka stężenia?
• Co się stanie dojdzie do zanieczyszczenia środowiska SO_2 o stężeniu 50 ug/m^3?
• Co się stanie dojdzie do zanieczyszczenia środowiska SO_2 o stężeniu 150 ug/m^3?
• Co się stanie dojdzie do zanieczyszczenia środowiska SO_2 o stężeniu 170 ug/m^3?

Przykład 2. (chemia)
Str. 251
Nauczyciel przerysowuje rysunek z podręcznika i zadaje pytania uczniom:
• Ile azotanu potasu rozpuści się w 100 g wody w temperaturze 40 ^oC?
• Ile azotanu potasu rozpuści się w 100 g wody w temperaturze 20 ^oC?
• Oblicz stężenie azotanu potasu w 100 g wody w temperaturze 40 ^oC.
• Oblicz stężenie azotanu potasu w 100 g wody w temperaturze 20 ^oC.</td><td>Uczniowie słuchają, zapisują to co znajduje się na tablicy w zeszytach i odpowiadają na pytania nauczyciela:

Przykład 1.

Odpowiedzi:

• Inaczej jest to zawartość dwutlenku siarki w powietrzu.
• ug/m^3
(mikrogram na metr sześcienny)
1 ug = 0,000 001 g = 10^{-6} g
• wśród porostów zabraknie brodaczki kępowej
• złotorost postrzępiony ginie w ekosystemie
• misecznica proszkowata znika z ekosystemu

Przykład 2.

• 60 g
• 30 g
• $C_p = m_s/m_r * 100\%$
$C_p = 60/160 * 100\% = 37{,}5$
• $C_p = 30/130 * 100\% = 23\,\frac{1}{13}$</td></tr>
</table>

Przykład 3. (fizyka) Str. 253 Nauczyciel przerysowuje rysunek z podręcznika i zadaje pytania uczniom: • Z jaką prędkością pan fizyk jechał skuterem? • Z jaką prędkością pan fizyk jechał samochodem? • Jaka była średnia prędkość jazdy na trasie A – B – A? • Czy średnia arytmetyczna prędkości jazdy samochodem i skuterem była by równa średniej prędkości?	**Przykład 3.** • $V_1 = \frac{120}{4} = 30\ [\frac{km}{h}]$ • $V_2 = \frac{120}{2} = 60\ [\frac{km}{h}]$ • $s = 120 + 120 = 240$ $t = 2 + 4 = 6$ $V = \frac{240}{6} = 40[\frac{km}{h}]$ • Odpowiedź nie.
Przykład 4. (medycyna) Str. 254 Alternatywny sposób obliczenia współczynnika BMI (Body Mass Index) Wzór: $BMI = \frac{Waga\ w\ kilogramach}{(wzrost\ w\ metrach)^2}$ Tabela BMI do 18.4 niedowaga 18.5 - 24.9 w normie 25.0 - 29.9 nadwaga 30.0 - 34.9 otyłość 35.0 - 39.9 duża otyłość 40 lub więcej ekstremalna otyłość	**Przykład 4.** Uczniowie obliczają własny współczynnik BMI.
Zadanie 8.170 str. 203 (zbiór) **Rozpuszczalność substancji**, czyli maksymalna ilość tej substancji, wyrażona w gramach, którą można rozpuścić w 100 gramach rozpuszczalnika w danej temperaturze.	**Zadanie 170** a) Z wykresu odczytujemy: chlorek sodu b) Z wykresu odczytujemy: 58^oC c) Z wykresu odczytujemy: 40^oC d) $C_p = m_s/m_r * 100\%$ $C_p = 20/120 * 100\% = 16\frac{2}{3}\%$
Zadanie 8.171 str. 204 (zbiór) Nauczyciel przerysowuje rysunek z podręcznika i zadaje pytania uczniom: a) O której godzenie zanotowano najniższą temperaturę, i ile ona wynosiła? b) Ile stopni wynosiła różnica między najwyższą i najniższą temperaturą tej doby? c) W jakich godzinach temperatura rosłą?	**Zadanie 171** a) Z wykresu odczytujemy: O 5:00 i wynosiła -3^oC. b) Z wykresu odczytujemy: $\|-3\|+\|5\| = 8^oC$ Inaczej amplituda temperatur. c) Z wykresu odczytujemy: Od 5:00 do 14:00

d) W jakich godzinach temperatura wynosiła 4^{o}C?	d) Z wykresu odczytujemy: O 12:00 i 19:00
Zadanie 8.172 str. 204 (zbiór) a) Z jaką prędkością szła Ania do przystanku autobusowego? b) Ile minut czekała Ania na autobus? c) Jaką drogę pokonała Ania autobusem? d) Z jaką średnią prędkością jechał autobus?	**Zadanie 8.172** a) $t = \frac{2}{3}h$ $s = 3km$ $V = \frac{s}{t}$ $V = 4,5$ b) 10 min c) 48km – 3km = 45km d) $s = 45km$ $t = \frac{5}{6}h$ $V = 54\frac{km}{h}$
Zadanie 8.173 str. 205 (zbiór) a) O której motocyklista dogoni rowerzystę? Zadanie rozwiąż graficznie, uzupełniając poniższy rysunek o wykres drogi motocyklisty. Odczytaj rozwiązanie z rysunku. b) Po jakim czasie od przyjazdu do szkoły motocyklisty, na miejsce dotarł rowerzysta?	**Zadanie 8.173** a) Po 20 km b) 9:40 – dojazd motocyklisty 10:40 – dojazd rowerzysty Odp: Po 1 godzinie.
Zadanie 8.174 str. 206 (zbiór) a) Jakim ruchem poruszało się ciało w ciągu pierwszych 6 sekund? Oblicz przyśpieszenie, z jakim poruszało się to ciało. b) Od 6 sekundy ciało poruszało się ruchem jednostajnym. Podaj prędkość tego ruchu. c) Jaką drogę przebyło to ciało w ciągu pierwszych 12 sekund? d) Oblicz średnią prędkość tego ciała w czasie pierwszych 12 sekund tego ruchu. Wyraź ją w km/h.	**Zadanie 8.174** a) $a = \frac{przyrost\ prędkości}{czas} = \frac{V}{t}$ $a = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}[\frac{m}{s^2}]$ b) 27 $[\frac{m}{s^2}]$ c) $V = \frac{s}{t}$ $s_1 = Vt$ $s_1 = 162$ m Drogę w ruchu jednostajnym liczymy ze wzoru: $s = \frac{V_p+V_k}{2} * t$ $s = V_pt + \frac{a}{2}t^2$ $s_2 = 81\ m$ $s = s_1 + s_2 = 243\ m$ d) V = $\frac{243}{12} = 20,25\ \frac{m}{s} = 20,25 * 3,6\ \frac{km}{s}$ V = 72,9 $\frac{km}{s}$
Zadanie 8.175 str. 206 (zbiór) Ze względu na stałą wartość przyśpieszenia ziemskiego i pomijając opór powietrza mamy tu do czynienia z ruchem	**Zadanie 8.175** Odp: B

jednostajnym. Prędkość stale spada Az do osiągnięcia maksymalnej wysokości a potem spada i wprost proporcjonalnym przyśpieszeniem. **Zadanie 8.176 str. 205 (zbiór)** a) Czas połowicznego rozpadu strontu-90 (czyli czas, po którym liczba jąder atomowych zmniejszy się o połowę)? b) Po ilu latach pozostanie 1,5 g strontu-90? c) Ile gramów strontu-90 pozostanie po 70 latach?	**Zadanie 8.176** a) 27,5 roku b) 40 latach c) ¾ g = 0,75 g
Podsumowanie: Zadanie pracy domowej Zadanie 8.207 str. 215 (zbiór)	

Klasa 2

Temat: Wielkości wprost proporcjonalne i odwrotnie proporcjonalne.

Czas: Jedna godziny lekcyjne.

Cele:

- stosowanie wielkości wprost proporcjonalnych i odwrotnie proporcjonalnych,
- stosowanie pojęć i rozróżnianie wielkości wprost proporcjonalnych i odwrotnie proporcjonalnych,
- opisywanie zależność odwrotnie proporcjonalnych i wprost proporcjonalnych tabelką,
- rozwiązywanie zadania z wykorzystaniem zależności odwrotnie proporcjonalnych.

Metody:

- rozmowa kierowana,
- metoda ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- powtórzeniowo-ćwiczeniowa.

Środki dydaktyczne:

- Zadania przygotowane przez nauczyciela.
- Matematyka - Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2 - Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro – M. Kurbacz, E. Kurbacz, E. Świda.

Nauczyciel	**Uczeń**
Czynności wstępne	
3. Sprawdzenie listy obecności. 4. Nauczyciel podaje temat lekcji.	3. Przygotowanie zeszytów i przyborów szkolnych. 4. Uczniowie zapisują temat lekcji w zeszytach.

Część Praktyczna

Rozpoczynamy rozwiązywanie zadań. Nauczyciel wyznacza kolejne osoby rozwiązujące zadania na tablicy.

Uczniowie wyznaczeni przez nauczyciela rozwiązują zadania na tablicy, gdy reszta klasy zapisuje swoje rozwiązania w zeszytach.

Co to są wielkości wprost proporcjonalne?

Dwie wielkości są **wprost** proporcjonalne jeżeli wraz ze wzrostem jednej wielkości druga wielkość **rośnie** tyle samo razy.
Np. Dł. boku kwadratu.

Własności:
$\frac{32}{16} = \frac{4}{2}$ Jeżeli weźmiemy dwie liczby z pierwszego wiersza i podzielimy przez siebie to będą one równe odpowiadającym liczbą z drugiego wiersza.
$\frac{16}{2} = \frac{48}{6}$ Jeżeli weźmiemy iloraz dwóch odpowiadających sobie liczb to będzie on równy dwóm innym odpowiadającym liczbą.

Zadanie 1
8 cm drewnianej deski waży 3 dag. Ile waży deska o dł. 142 cm?

Zadanie 1

Dł. deski	8cm	142cm
Waga deski	3 dag	x

$$\frac{8}{3} = \frac{142}{x}$$
$$8x = 426$$
$$x = 53{,}25\ [dag]$$

Zadanie 2
Na przejechanie 42 km ze stałą prędkością auto spala 7,2l benzyny. Ile przejedzie spalając 82 litry?

Zadanie 2

Dystans	42	x
Spalanie	7,2	82

$$\frac{42}{7{,}2} = \frac{x}{82}$$
$$7{,}2x = 3444$$
$x = 478\frac{1}{3}\ [km]$

Co to są wielkości odwrotnie proporcjonalne?

Dwie wielkości są **odwrotnie** proporcjonalne jeżeli wraz ze wzrostem jednej wielkości druga wielkość **maleje** tyle samo razy.

li. os.	1	2	3	4	5
kwota	100	50	33,(3)	25	20

$$2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 100$$

Zadanie 3

Przelot samolotem ze średnią prędkością 650 $\frac{km}{h}$ trwa 6,5h. Z jaką śr. Prędkością należałoby lecieć aby lot był o godzinę krótszy?

Zadanie 4

Pewien dom ekipa 15 robotników budowała 142 dni. Ilu dodatkowych robotników należałoby zatrudnić, aby ten sam dom wybudować dwa razy szybciej?

Zadanie 6.96

-50	a	25	0,4	b	10-5$\sqrt{2}$
c	$-\frac{1}{3}$	2	D	$10\sqrt{2}$	e

Oblicz a, b, c, d i e.

Zadanie 3

Śr. prędkość	650	x
Czas lotu	6,5	6,5 – 1 = 5,5

650· 6,5 = 5,5· x

4225 = 5,5· x

$x = 768\frac{10}{55}$ =

Odpowiedź: Należało by lecieć z prędkością $768\frac{2}{11}$ km/h.

Zadanie 4

L. rob.	15	15 + x
L. dni	142	$\frac{142}{2}$ = 71

15 · 142 = (15 + x) · 71

1065 = 71· x

$x = 15$

Odpowiedź: Potrzeba 15 robotników więcej.

Zadanie 6.96

$$2 \cdot 25 = -50\,c$$
$$50 = -50\,c$$
$$c = -1$$

$$a \cdot (-\frac{1}{3}) = 2 \cdot 25$$
$$-\frac{a}{3} = 50$$
$$a = -150$$

0,4 · $d = 2 \cdot 25$
$$d = 125$$

$$10\sqrt{2} \cdot b = 2 \cdot 25$$
$$b = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$
$$\left(10 - 5\sqrt{2}\right) \cdot e = 50$$
$$e = \frac{50}{10 - 5\sqrt{2}}$$
$$e = \frac{10}{2 - \sqrt{2}}$$
$$e = \frac{10}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$
$$e = \frac{10(2 + \sqrt{2})}{4 - 2}$$
$$e = 10 + 5\sqrt{2}$$

Zadanie 6.97

Wypisz wszystkie pary liczb naturalnych spełniających zależność:

a)$xy = 24$

Zadanie 6.98

Wypisz wszystkie pary liczb całkowitych spełniających zależność:

b)$xy = 64$

Zadanie 6.99

Brygada 16 robotników na wykonanie pewnej liczby części samochodowych potrzebuje 8h 15min. Ile czasu potrzeba na wykonanie tej samej pracy brygadzie 12 robotników, przy założeniu, że wydajność pracy każdego robotnika się nie zmieni?

Zadanie 6.100

Zapas żywności w stołówce szkolnej dla 60 osób wystarczy na 5 dni. Na ile dni wystarczyłoby tej żywności, jeśli liczba osób stołujących się w szkole wzrosła by o 40 osób (zakładamy, że racje żywnościowe pozostaną takie same)?

Zadanie 6.101

Samochód osobowy jadący ze średnią prędkością 70 km/h pokonuje pewna drogę w czasie 2 h i 12 min. W jakim czasie pokona tę drogę motorowerzysta jadący ze średnią prędkością 22 km/h? Z jaką prędkością należy jechać, aby tę drogę pokonać w czasie 3,5h?

Zadanie 6.97

$$y = \frac{24}{x}$$

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

Zadanie 6.98

$$y = \frac{64}{x}$$

x	1	2	4	8	16	32	64
y	64	32	16	8	4	2	1

x	-1	-2	-4	-8	-16	-32	-64
y	-64	-32	-16	-8	-4	-2	-1

Zadanie 6.99

L. rob.	16	12
Czas pracy	8h 15min	x

$$16 \cdot 8\frac{1}{4} = 12x$$
$$132 = 12x$$
$$x = 11$$

Odpowiedź: Potrzeba by było 11 godzin.

Zadanie 6.100

L. os.	60	60 + 40
Czas	5 dni	x

$$60 \cdot 5 = 100x$$
$$x = \frac{300}{100}$$
$$x = 3$$

Odpowiedź: Żywności wystarczyłoby na 3 dni.

Zadanie 6.101

Prędkość	70	22
Czas	2h 12min	x

a)W jakim czasie tę drogę pokona motorowerzysta?

$70 \cdot 2\frac{1}{5} = 22 \cdot x$

$154 = 22x$

$x = 7$ [h]

Odpowiedź: Rowerzyście pokonanie tej trasy zajęło 7 godzin.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
b) Z jaką prędkością trzeba jechać aby te drogę pokonać w czasie 3,5h?

Prędkość	70	y
Czas	2h 12min	3,5

$70 \cdot 2\frac{1}{5} = 3{,}5 \cdot y$
$154 = 3{,}5y$
$y = 44\frac{km}{h}$
Odpowiedź: Trzeba jechać z prędkością 44 km/h
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Zadanie 6.103
Koło o obwodzie 2,1 m na pewnym odcinku drogi wykonało 300 obrotów.
a)Ile obrotów wykona na tej drodze koło o obwodzie 0,3m?
b) Jaki jest promień koła, które na tej drodze wykonało 60 obrotów?
</td>
<td>
Zadanie 6.103

Obwód	2,1	0,3
Obrót	300	x

$$2{,}1 \cdot 300 = 0{,}3 \cdot x$$
$0{,}3x = 620$
$$x = 2066\frac{2}{3}$$
Odpowiedź: Koło wykona $2066\frac{2}{3}$ obrotu.

Obwód	2,1	y
Obrót	300	60

$$2{,}1 \cdot 300 = 60 \cdot y$$
$$60y = 620$$
$$y = 10\frac{1}{3}[m]$$
Promień
$$l = 2\pi r$$
$$10\frac{1}{3} = 2\pi r$$
$$r = 5\frac{1}{6\pi}$$
Odpowiedź: Promień koła wynosi $5\frac{1}{6\pi}$.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
Podsumowanie:
Zadanie pracy domowej
Zadania nie zrealizowane w czasie zajęć i zadanie 6.97 b, 6.98 a, 6.102.
</td>
</tr>
</table>

Klasa 2

Temat: Funkcja homograficzna.

Cele ogólne:

- kształcenie umiejętności logicznego myślenia,

- ćwiczenie sprawności obliczeniowych.

Cele szczegółowe:

- poznanie przez uczniów wykresu funkcji homograficznej,

- przypomnienie wiadomości dotyczących przesunięć wykresu funkcji,

- ćwiczenie umiejętności przekształcania wzoru funkcji postaci $\frac{ax+b}{cx+d}$ do postaci podstawowej $\frac{a}{x}$
i wyznaczania wektora przesunięcia.

Metody:

- pogadanka,

- ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- wprowadzeniowa.

Środki dydaktyczne:

- zestawy zadań dla uczniów.

<table>
<tr><th>Czynności nauczyciela</th><th>Czynności ucznia</th></tr>
<tr><td>Temat: Funkcja homograficzna.

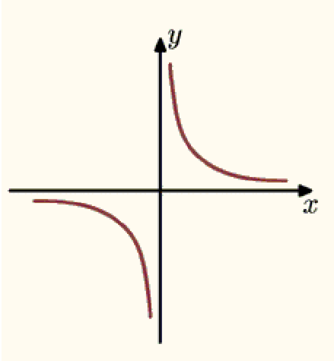
Narysujcie wykres funkcji
$f(x) = \frac{2}{x}\ i\ \ g(x) = -\frac{2}{x}$
Opiszcie ich dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność.</td><td>Dwóch uczniów rysuje wykresy na tablicy, pozostali w swoich zeszytach.
<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>f(x)=2/x</td><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>

Nauczyciel dyktuje uczniom notatkę:
Wykresami funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = -\frac{2}{x}$ są gałęzie hiperboli, które są położone w I i III ćwiartce układu współrzędnych lub w II i IV ćwiartce układu współrzędnych, o czym decyduje liczba w liczniku.

Przesuńmy wykres funkcji g(x) o wektor [2,1].
Jak będzie wyglądał wykres funkcji $g_1(x)$ i jej wzór?

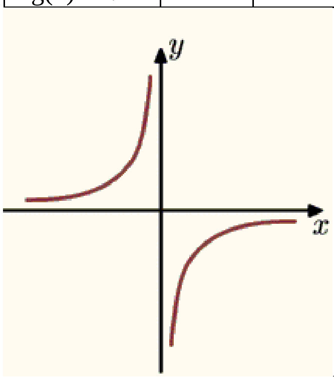
Asymptotami funkcji g(x) po przesunięciu o wektor [2,1] są proste x=2 i y=1, a funkcja określona jest wzorem:
$g_1(x) = \frac{-2}{x-2} + 1.$

Funkcją homograficzną nazywamy funkcję, która jest ilorazem dwóch funkcji liniowych, czyli funkcję określoną wzorem $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $cx + d \neq 0$, wykresem tej funkcji są gałęzie hiperboli.

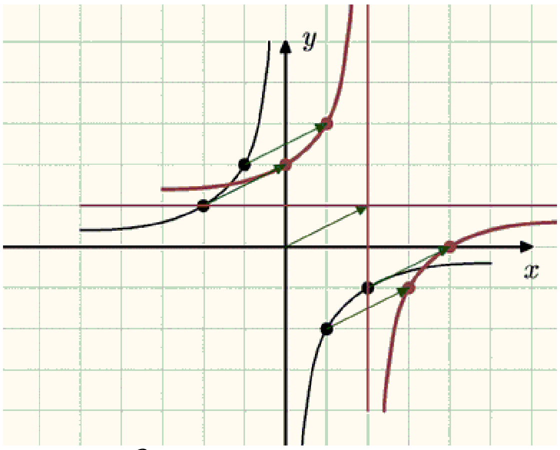


$D_f : x \in R\{0\}$
$ZW: y \in R\{0\}$
$Funkcja\ malejąca$

x	-2	-1	1	2
g(x)=-2/x	1	1	-2	-1



$D_f: x \in R\{0\}$
$ZW: y \in R\{0\}$
$Funkcja\ rosnąca$

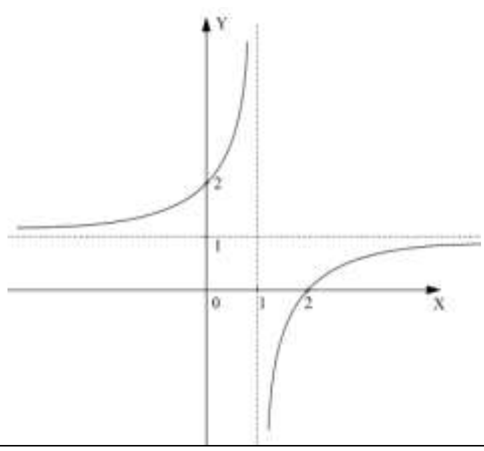


$g_1(x) = \frac{-2}{x-2} + 1$

Zad. 1
Napisz wzór funkcji f po przesunięciu o wektor $\vec{v}$, doprowadź ją do postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
a) $f(x) = \frac{3}{x}, \vec{v} = [-2,5]$
b) $f(x) = \frac{-10}{x}, \vec{v} = [-5,-2]$
c) $f(x) = \frac{1}{x}, \vec{v} = [7,5]$

a) $f_1(x) = \frac{3}{x+2} + 5$

$f_1(x) = \frac{3+5(x+2)}{x+2}$

Zad. 2 Mając wzór funkcji homograficznej podaj wzór funkcji podstawowej, czyli $f(x) = \frac{a}{x}$ oraz wektor przesunięcia. a) $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{-4x+3}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{10x+1}{x+7}$ d) $f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$ e) $f(x) = \frac{-x+2}{x-1}$	$f_1(x) = \frac{5x+13}{x+2}$ b) $f_1(x) = \frac{-10}{x+5} - 2$ $f_1(x) = \frac{-10-2(x+5)}{x+5}$ $f_1(x) = \frac{-2x-20}{x+5}$ c) $f_1(x) = \frac{1}{x-7} + 5$ $f_1(x) = \frac{1+5(x-7)}{x-7}$ $f_1(x) = \frac{5x-34}{x-7}$ a) $f(x) = \frac{3x-2}{x+1} = \frac{3(x+1)-5}{x+1} = \frac{-5}{x+1} + 3$ $f_1(x) = -\frac{5}{x}, \vec{v} = [-1{,}3]$ b) $f(x) = \frac{-4x+3}{x-2} = \frac{-4(x-2)-5}{x-2} = \frac{-5}{x-2} - 4$ $f_1(x) = -\frac{5}{x}, \vec{v} = [2, -4]$ c) $f(x) = \frac{10x+1}{x+7} = \frac{10(x+7)-69}{x+7} = \frac{-69}{x+7} + 10$ $f_1(x) = -\frac{69}{x}, \vec{v} = [-7{,}10]$ d) $f(x) = \frac{2x+3}{x-4} = \frac{2(x-4)+11}{x-4} = \frac{11}{x+4} + 2$ $f_1(x) = \frac{11}{x}, \vec{v} = [4{,}2]$ e) $f(x) = \frac{-x+2}{x-1} = \frac{-(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1$ $f_1(x) = \frac{1}{x}, \vec{v} = [1, -1]$
Podsumowanie Nauczyciel zadaje pytania dotyczące lekcji.	Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela.
Praca domowa Zad. 1 Mając wzór funkcji homograficznej $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ podaj wzór funkcji podstawowej, czyli $f(x) = \frac{a}{x}$ oraz wektor przesunięcia i narysuj jej wykres.	$f(x) = \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x-1)-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 1$ $f_1(x) = \frac{-1}{x}, \vec{v} = [1{,}1]$ 

SCENARIUSZ LEKCJI

1. INFORMACJE WSTĘPNE

Klasa 2 liceum
Czas trwania lekcji; 45 minut
Nauczany przedmiot; matematyka

2.PROGRAM NAUCZANIA

Matematyka poziom podstawowy. Podręcznik i zbiór zadań do liceów i techników klasa 2. Marcik Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda. Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro.

3.TEMAT LEKCJI

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

4. CELE LEKCJI

-uczeń stosuje definicję funkcji kwadratowej
-uczeń rozpoznaje własności funkcji kwadratowej
-uczeń stosuje postać iloczynową funkcji kwadratowej

5. METODY NAUCZANIA

-pogadanka
-praca z podręcznikiem i zbiorem

6.ZASADY NAUCZANIA

-wyrabianie pewności siebie u ucznia przez wypowiedz i czynny udział w zajeciach
-stopniowanie trudności
-trwałość wiedzy
-wiązanie teorii z praktyką

7.FORMY PRACY UCZNIÓW

-zbiorowa

8. ŚRODKI DYDAKTYCZNE

-tablica, kreda
- podręcznik, zbiór zadań

9. STRUKTURA LEKCJI

CZYNNOŚCI NAUCZYCIELA	CZYNNOŚĆI UCZNIA
-czynności organizacyjne -sprawdzenie pracy domowej -przypomnienie tematyki poprzedniej lekcji -podanie tematu i celów lekcji -wprowadzenie do lekcji Funkcja kwadratowa zapisana w postaci iloczynowej ma postać: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ W powyższym wzorze a jest współczynnikiem liczbowym takim, że a jest różne od zera. Litery x_1,x_2 oznaczają miejsca zerowe funkcji f(x). Uwaga! Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych to postać iloczynowa nie istnieje. Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej i delta jest większa od zera to możemy obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2 korzystając ze wzorów: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Zaletą postaci iloczynowej jest to, ze widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku a możemy określić również czy ramiona paraboli są skierowane do góry czy do dołu.	-przygotowanie zeszytów -zapisanie tematu lekcji -czynny udział w lekcji- uczniowie zapisują informacje podane przez nauczyciela oraz rozwiązują przykłady według określonych zasad
<u>Zadanie 2.41/41</u> Wyznacz miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej f, jeśli: e) $f(x) = 5x^2+10x$ f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6x$ **<u>Zadanie 2.44/41</u>** Przedstaw wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej (o ile to możliwe), jeśli: b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{4}x - 1$ c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 6x + 12$ f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 54$	**<u>Zadanie 2.41/41</u>** a) i b) do domu
<u>Zadanie 2.46/42</u> Na podstawie wzoru funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej podaj miejsca zerowe tej funkcji: d) $f(x) = -\frac{2}{5}x(x-6)$	**<u>Zadanie 2.46/42</u>** a) do domu

Zadanie 2.47/42 Dane są miejsca zerowe funkcji kwadratowej oraz współczynnik a. Podaj wzór tej funkcji w postaci iloczynowej, jeśli: a) $x_1 = -4$, $x_2 = 0{,}5$, $a=\sqrt{2}$ f) $x_0 = -2$, $a=7$ **Zadanie 2.48/42** Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej. Podaj wzór funkcji f w postaci ogólnej, jeśli: b) $f(x) = \frac{4}{3}x(x+6)$, c) $f(x) = \frac{5}{6}(x-2)(x+3)$, **Zadanie 2.49/42** Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Podaj wzór funkcji f w postaci iloczynowej(o ile to możliwe) bez wyznaczania wzoru funkcji f w postaci ogólnej. d) $f(x) = -9(x + 2)^2 + 36$ f) $f(x) = -0{,}5(x + 7)^2 - 1$ **Zadanie 2.52/43** Przedstaw wzór funkcji kwadratowej $f(x) = 9x^2 +12x + 4$ w postaci kanonicznej oraz iloczynowej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli i miejsca zerowe funkcji f.	**Zadanie 2.53/43 do domu**

Klasa 2

Temat: Funkcja wykładnicza i jej własności.

Typ lekcji: wprowadzająca,
Czas trwania zajęć: 1 godzina lekcyjna (45 minut).

CELE NAUCZANIA
Cel ogólny :
- szkicowanie wykresów funkcji wykładniczej i określanie jej własności.

Cele szczegółowe :
Uczeń:
- uczeń szkicuje wykresy funkcji wykładniczej,
- określa własności funkcji wykładniczej.

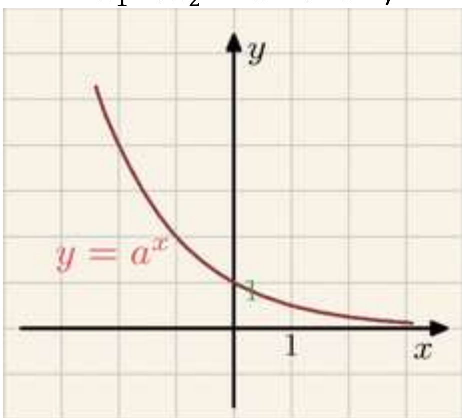
Cele wychowawcze:
- Rozwijanie umiejętności poprawnego formułowania myśli.

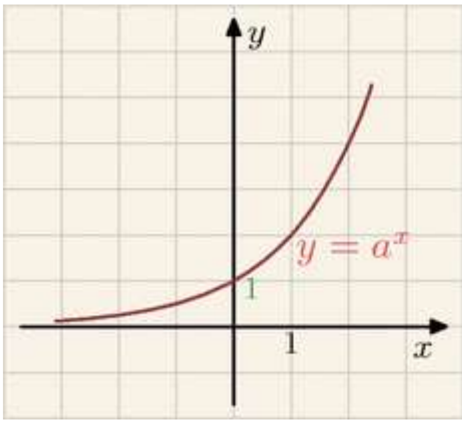
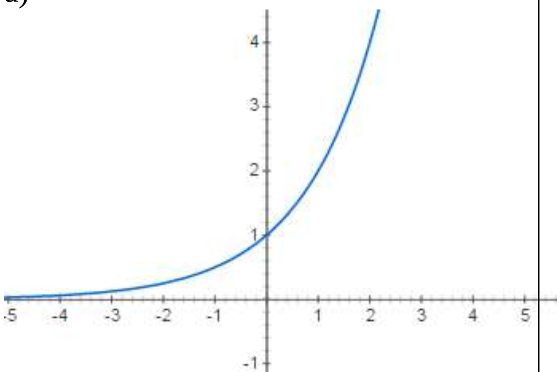
Metody pracy:
- Metoda podająca,
- Metoda treningowa – rozwiązywanie zadań.

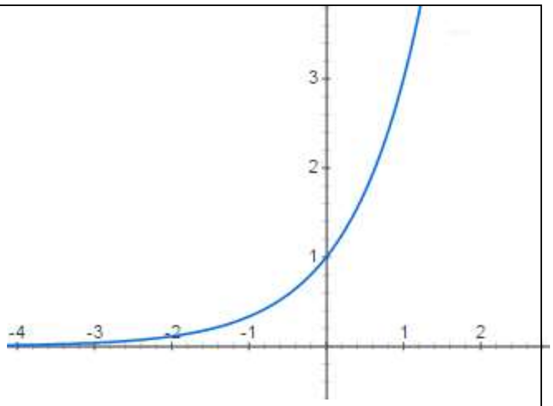
Formy pracy:
- Indywidualna,
- Praca z całą klasą.

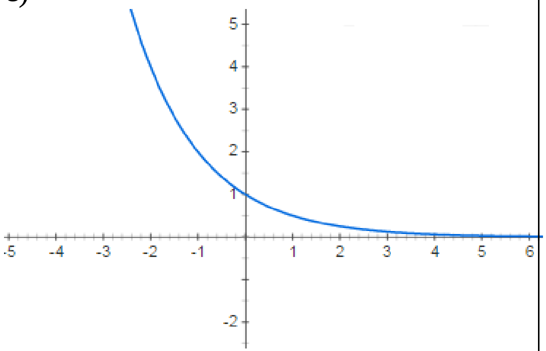
Środki dydaktyczne:
- Karta pracy,
- Zeszyty,
- Tablica, kreda.

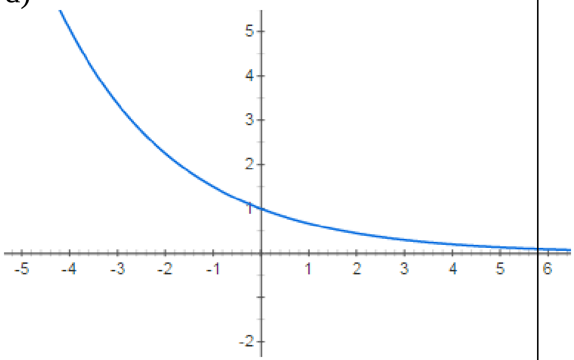
Przebieg lekcji

Ogniwo lekcji	Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
1.Czynności Organizacyjne	Sprawdza obecność uczniów na lekcji, zaznacza ewentualne nieobecności.	Zgłasza nieobecność kolegów.
2.Część wstępna: a) zapoznanie z celami lekcji b)sformułowanie tematu lekcji c)wprowadzenie wiadomości	a)Celem dzisiejszej lekcji jest zdobycie umiejętności szkicowania wykresów funkcji wykładniczych. b)Podaje temat „Funkcja wykładnicza i jej własności”. Definicja **Funkcją wykładniczą** nazywamy funkcję $y = a^x (f(x) = a^x)$, gdzie $x \in R$ i a jest ustaloną liczbą dodatnią. **Monotoniczność funkcji wykładniczej:** • gdy $a \in (0,1)$ to funkcja wykładnicza jest **malejąca** (tzn. wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji, czyli dla dowolnych dwóch argumentów $x_1 < x_2 \leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$)  np. $2 < 3$ ale $\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3, \frac{1}{9} > \frac{1}{27}$ • gdy $a \in (1, +\infty)$ inaczej $a > 1$, to funkcja wykładnicza jest **rosnąca** (tzn. wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości funkcji, czyli dla dowolnych dwóch argumentów $x_1 < x_2 \leftrightarrow a^{x_1} <$	a) Przewiduje czego będzie dotyczyła lekcja. b)Zapisuje temat lekcji. c)Patrzy na tablicę i sporządza notatki.

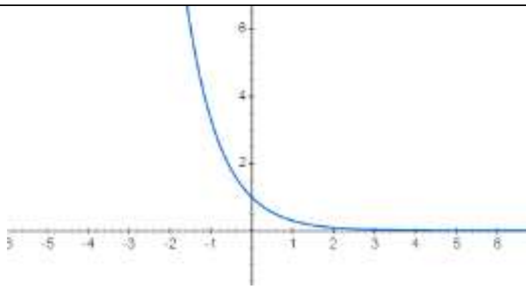
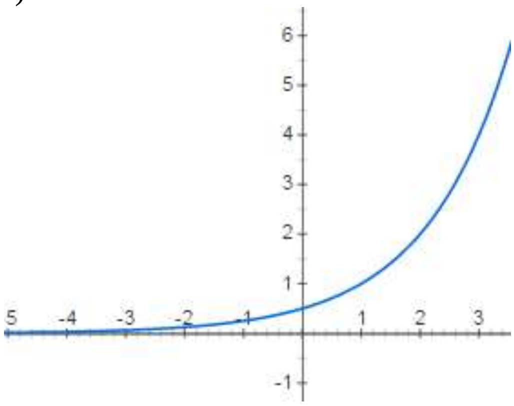
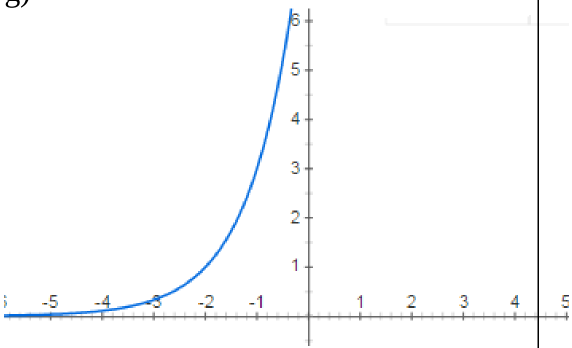
	a^{x_2})  np. $2 < 3$ i $3^2 < 3^3, 9 < 27$ Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ dla $a \in R_+ \backslash \{1\}$ jest **różnowartościowa**, czyli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 zachodzi warunek: $a^{x_1} = a^{x_2} \leftrightarrow x_1 = x_2$	
	Zadanie 1. (Karta pracy) Naszkicuj wykres funkcji i określ jej własności. a)$y = 2^x$ b)$y = 3^x$ c)$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d)$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e)$y = (0{,}3)^x$ f)$y = (2)^{x-1}$ g)$y = (3)^{x+2}$ h)$y = 2 * 2^x$ i)$y = \frac{1}{9} * 3^x$ j)$y = 2^x + 1$	Zadanie 1. (Karta pracy) Rozwiązanie: a)  D: $x \in R$ z.w.: $y \in (0, +\infty)$ monotoniczność: funkcja rosnąca m.z.: brak asymptota: $y = 0$ b)

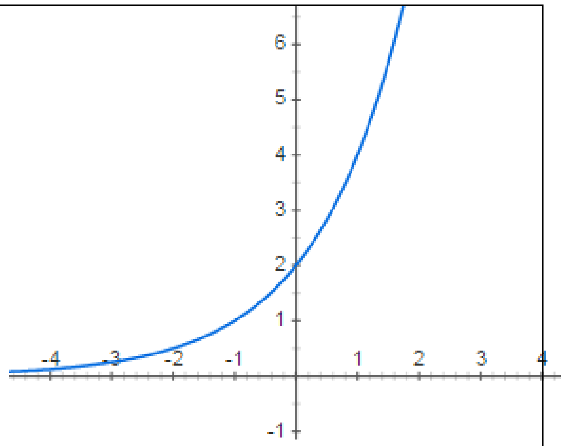
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>


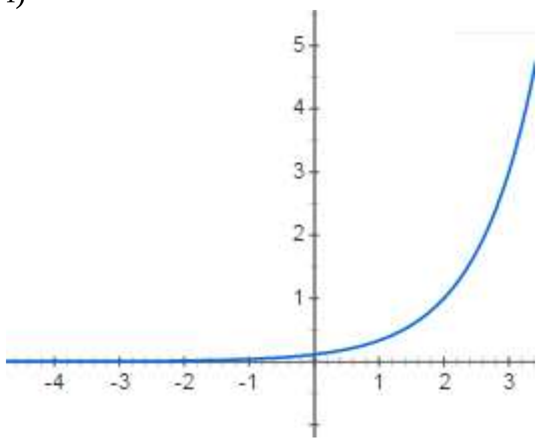
D: $x \in R$
z.w.: $y \in (0, +\infty)$
monotoniczność: funkcja rosnąca
m.z.: brak
asymptota: $y = 0$
c)


D: $x \in R$
z.w.: $y \in (0, +\infty)$
monotoniczność: funkcja malejąca
m.z.: brak
asymptota: $y = 0$
d)


D: $x \in R$
z.w.: $y \in (0, +\infty)$
monotoniczność: funkcja malejąca
m.z.: brak
asymptota: $y = 0$
e)
</td>
</tr>
</table>

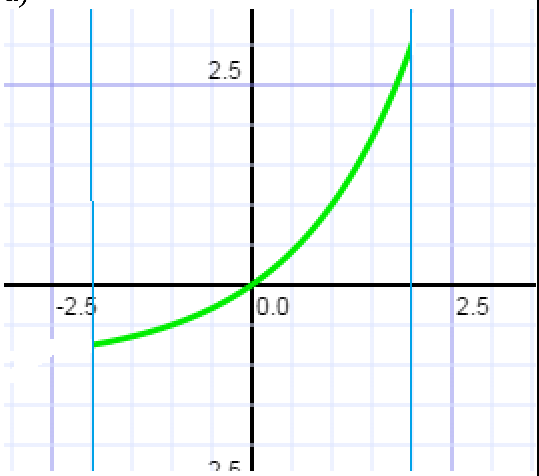
		 D: $x \in R$ z.w.: $y \in (0, +\infty)$ monotoniczność: funkcja malejąca m.z.: brak asymptota: $y = 0$ f)  D: $x \in R$ z.w.: $y \in (0, +\infty)$ monotoniczność: funkcja rosnąca m.z.: brak asymptota: $y = 0$ g)  D: $x \in R$ z.w.: $y \in (0, +\infty)$ monotoniczność: funkcja rosnąca m.z.: brak asymptota: $y = 0$ h)

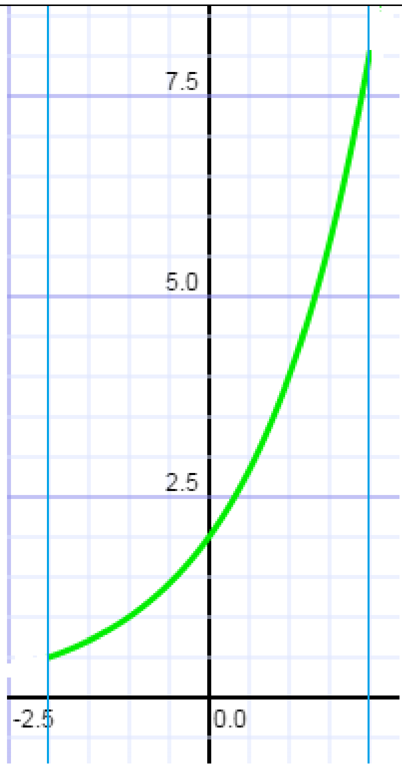
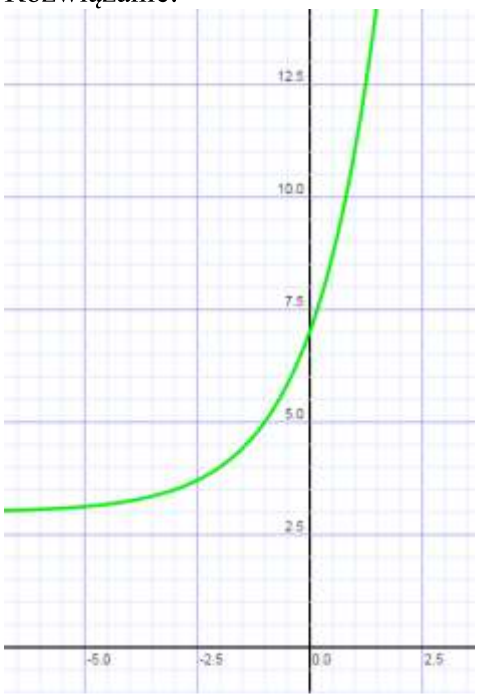
<table>
<tr><td></td><td></td><td>


D: $x \in R$
z.w.: $y \in (0, +\infty)$
monotoniczność: funkcja rosnąca
m.z.: brak
asymptota: $y = 0$
i)


D: $x \in R$
z.w.: $y \in (0, +\infty)$
monotoniczność: funkcja rosnąca
m.z.: brak
asymptota: $y = 0$

j)
</td></tr>
</table>

		 D: $x \in R$ z.w.: $y \in (1, +\infty)$ monotoniczność: funkcja rosnąca m.z.: brak asymptota: $y = 1$
	Zadanie 2. (Karta pracy) Narysuj wykres funkcji f określonej na przedziale $\langle -2,2 \rangle$ wzorem: a)$f(x) = 2^x - 1$ b)$f(x) = 2^{x-1}$ oraz określ własności tej funkcji.	Zadanie 2. (Karta pracy) Rozwiązanie: a)  D: $x \in < -2,2 >$ z.w.: $y \in (-\frac{3}{4}, 3)$ monotoniczność: funkcja rosnąca m.z.: (0,0) b)

		 D: $x \in< -2,2 >$ z.w.: $y \in (\frac{1}{2}, 8)$ monotoniczność: funkcja rosnąca m.z.: brak
	Zadanie 3. (Karta pracy) Narysuj wykres funkcji i określ jej własności. $f(x) = 3^{x+2} + 3$	Zadanie 3. (Karta pracy) Rozwiązanie:  D: $x \in R$ z.w.: $y \in (3, +\infty)$ monotoniczność: funkcja rosnąca m.z.: brak

		asymptota: $y = 3$
3. Część główna: a)rozwiązywanie zadań na tablicy	a)Kontroluje prace uczniów i koryguje błędy.	a) Rozwiązuje zadania na tablicy. Zapisuje rozwiązania w zeszycie.
4.Część końcowa: a)Podsumowanie lekcji	a)Zadaje pytania związane z tematem lekcji i ocenia aktywność uczniów.	a) Odpowiada na pytania dotyczące tematu lekcji.

Klasa 2

Temat: Zastosowanie funkcji wykładniczej.

Cele ogólne:

- kształcenie umiejętności logicznego myślenia,

- ćwiczenie sprawności rachunkowych,

Cele szczegółowe:

- przypomnienie definicji funkcji wykładniczej i jej własności,

- ćwiczenie umiejętności stosowania poznanych wiadomości w zadaniach.

Metody:

- ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- powtórzeniowa.

Środki dydaktyczne:

- „Matematyka 2 LO podręcznik" E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab

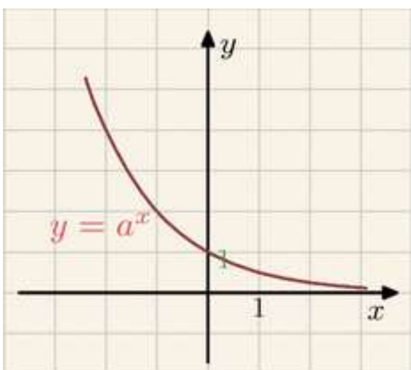
- „Matematyka. Klasa 2. Zbiór zadań - szkoła ponadgimnazjalna" E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab.

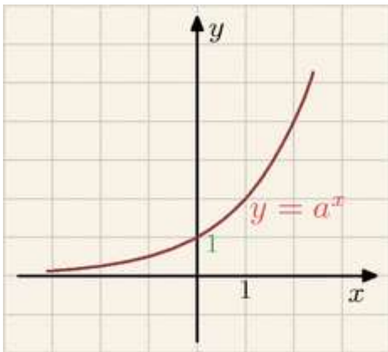
<table>
<tr><th>Czynności nauczyciela</th><th>Czynności ucznia</th></tr>
<tr><td>Temat: Zastosowanie funkcji wykładniczej.

Przypomnijcie definicję funkcji wykładniczej.

Kiedy funkcja wykładnicza jest malejąca, a kiedy rosnąca?</td><td>

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję $y = a^x$ ($f(x) = a^x$), gdzie $x \in R$ i a jest ustaloną liczbą dodatnią.

Monotoniczność funkcji wykładniczej:
• gdy $a \in (0,1)$ to funkcja wykładnicza jest malejąca

</td></tr>
</table>

Czy funkcja wykładnicza jest różnowartościowa?	• gdy $a \in (1, +\infty)$ inaczej $a > 1$, to funkcja wykładnicza jest rosnąca  Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ dla $a \in R_+ \backslash \{1\}$ jest różnowartościowa, czyli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 zachodzi warunek: $a^{x_1} = a^{x_2} \leftrightarrow x_1 = x_2$
Zad. 1 Ktoś wymyślił plotkę i przekazał ją w ciągu pięciu minut tylko trzem osobom, a te (wierząc w prawdziwość informacji) przekazały je w pięć minut kolejnym trzem osobom (które jej jeszcze nie słyszały). Sytuacja powtarzała się w podobny sposób, aż po godzinie okazało się, że informacja jest nieprawdziwa. Ile osób usłyszało plotkę? Zad. 2 Liczebność pewnej kolonii bakterii wynosi 2 miliony. Co każde cztery minuty kolonia powiększa swoją liczebność o 5%. Ile bakterii będzie liczyć ta kolonia po upływie jednej godziny? (Wynik podaj w zaokrągleniu do tysięcy) Zad. 3 Wartości pewnych akcji zyskują na wartości 8% rocznie. Ile będą warte po 6 latach, jeśli Paweł kupił pakiet akcji za 100000 złotych? Zad. 4 Jedna warstwa materiału użytego na zasłonę przepuszcza 80% światła. Ile światła przepuszcza zasłona wykonana z 6 warstw?	Zad. 1 0 min – 5 min → 3 osoby 5 min – 10 min → 3*3=9 osób 10 min – 15 min → 3*3*3=27 osób itd. Wzór funkcji, gdzie x to numer pięciominutowego odstępu czasu. $f(x) = 3^x$ $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(12) =$ $= 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{12} =$ $= 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 531441 = 797160$ Odp. Plotkę usłyszało 797160 osób. Zad. 2 Wzór funkcji opisującej liczebność bakterii po upływie x czterominutowych odcinków czasu: $f(x) = 2000000 * (1{,}05)^x$ W jednej godzinie jest 15 odcinków czterominutowych, więc: $f(15) = 2000000 * (1{,}05)^{15}$ $f(15) = 4157856 \approx 4158000$ Odp. Po godzinie kolonia będzie liczyła około 4 milionów 158 tysięcy bakterii. Zad. 3 Wzór funkcji opisującej wartość akcji po x latach: $f(x) = 100000 * (1{,}08)^x$ Po sześciu latach: $f(6) = 100000 * (1{,}08)^6 = 158687{,}43\ zł$ Odp. Po sześciu latach Paweł otrzyma 158687,43 złotych. Zad. 4 Wzór funkcji opisującej przepuszczalność światła w x zasłonach: $f(x) = (0{,}8)^x$

Zad. 5 Komputer traci na wartości 30% rocznie. Jaką wartość po pięciu latach będzie miał komputer Marty, który został kupiony za 4000 zł?	W sześciu warstwach mamy: $f(6) = (0{,}8)^6 = 0{,}262144$ $0{,}262144 * 100\% = 26{,}2144\%$ Odp. Zasłona złożona z 6 warstw będzie przepuszczać 26,2144% światła. Zad. 5 Wzór funkcji opisującej wartość komputera po x latach: $f(x) = 4000 * (0{,}7)^x$ Po pięciu latach mamy: $f(5) = 4000 * (0{,}7)^5 = 4000 * 0{,}16807 =$ $= 672{,}28$ Odp. Komputer Marty po 5 latach będzie wart 672,28 złotych.
Powtórzenie Nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące lekcji.	Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela.
Praca domowa Zad. 1 Czas połowicznego rozpadu promieniotwórczego izotopu platyny wynosi 50 lat. Oblicz masę tego izotopu, która pozostanie po 250 latach, jeśli masa początkowa próbki wynosiła 4 g.	Zad. 1 Wzór funkcji opisującej rozpad izotopu po x pięćdziesięcioletnich odcinkach czasu. $\mathrm{f(x)} = 4 * (0{,}5)^{\mathrm{x}}$ Podczas 250 lat mamy 5 odcinków czasu po 50 lat więc: $\mathrm{f}(5) = 4 * (0{,}5)^5 = 4 * 0{,}03125 = 0{,}125$ Odp. Izotop będzie ważył 0,125 g.

Klasa 3

Temat: Powtórka przed maturą – funkcja kwadratowa.

Czas: Jedna godziny lekcyjne.

Cele:

- utrwalenie wiadomości o funkcjach kwadratowych,
- zastosowanie pojęć dotyczących funkcji kwadratowych,
- rozwijanie umiejętności rozwiązywania zadań z arkuszy maturalnych;

Metody:

- rozmowa kierowana,
- metoda ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- powtórzeniowo-ćwiczeniowa.

Środki dydaktyczne:

- Zadania przygotowane przez nauczyciela.

<table>
<tr><th>Nauczyciel</th><th>Uczeń</th></tr>
<tr><td colspan="2">Czynności wstępne</td></tr>
<tr><td>5. Sprawdzenie listy obecności.

6. Nauczyciel podaje temat lekcji.</td><td>5. Przygotowanie zeszytów i przyborów szkolnych.

6. Uczniowie zapisują temat lekcji w zeszytach.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Część Praktyczna</td></tr>
</table>

Nauczyciel rozpoczyna lekcję od sprawdzenia pracy domowej. Rozpoczynamy rozwiązywanie zadań. Nauczyciel wyznacza kolejne osoby rozwiązujące zadania na tablicy.	Odpowiedź uczniów: Uczniowie wyznaczeni przez nauczyciela rozwiązują zadania na tablicy, gdy reszta klasy zapisuje swoje rozwiązania w zeszytach.
Zadanie 1 Punkt P = (4,13) należy do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + bx - 3$. Znajdź miejsce zerowe funkcji f.	**Zadanie 1** $f(x) = x^2 + bx - 3$ $13 = 4^2 + 4b - 3$ $13 = 16 + 4b - 3$ $0 = 4b$ $0 = b$ $f(x) = x^2 - 3$ $0 = x^2 - 3$ $3 = x^2$ $x = \sqrt{3} \quad lub \;\; x = -\sqrt{3}$
Zadanie 2 Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.	**Zadanie 2** Zapisujemy wyróżnik danego trójmianu kwadratowego: $\Delta = b^2 - 4c$. Ponieważ $c < 0$ to $-4c > 0$. Stąd Δ jest sumą dwóch wyrażeń: nieujemnego i dodatniego, czyli jest dodatnia. A zatem trójmiany $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.
Zadanie 3 Znajdź równanie prostej prostopadłej do osi OY i mającej z wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 8x + 9$ jeden punkt wspólny.	**Zadanie 3** $x_w = -\frac{b}{2a}$ $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 9$ $\Delta = 64 - 36$ $\Delta = 28$ $y_w = -\frac{28}{4} = -7$ Odpowiedź: Prosta y = -7 jest prostopadły do osi OX i ma jeden punkt wspólny z funkcja f.
Zadanie 4 Wyznacz współrzędne punktu wspólnego	**Zadanie 4** $2x^2 + 7x + 3 = x^2 + 5x + 2$

<table>
<tr><td>wykresów funkcji $f(x) = 2x^2 + 7x + 3$ i $g(x) = x^2 + 5x + 2$.

Zadanie 5
Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest o 133 większych od iloczynu tych liczb. Znajdź te liczby.

Zadanie 6
Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

Zadanie 7
Liczbę 168 rozłóż na takie dwa czynniki, których suma jest równa 31.</td>
<td>$x^2 + 2x + 1 = 0$
$(x+1)(x+1) = 0$
$x = -1$
$f(-1) = 2 - 7 + 3$
$f(-1) = -2$
Odpowiedź: Funkcja przecina się w jednym punkcje (-1, -2).

Zadanie 5
$x^2 + (x+1)^2 = x(x+1) + 133$
$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 133$
$x^2 + x - 132 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 529$
$\sqrt{\Delta} = 23$
$x_1 = \frac{-1-23}{2} = -12$ - nie jest liczbą naturalną
$x_2 = \frac{-1+23}{2} = 11$
Odpowiedź są to liczby 12, 11.

Zadanie 6
Niech a oznacza najmniejszą z czterech szukanych liczb całkowitych. Wtedy kolejne liczby to: a + 1, a + 2 , a + 3 .
Zapisujemy zatem równanie kwadratowe

$a + 3 = a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2$

które po przekształceniu przyjmuje postać $3a^2 + 5a + 2 = 0$.
Równanie to ma dwa rozwiązania: $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{2}{3}$. Rozwiązanie $-\frac{2}{3}$ odrzucamy jako sprzeczne z treścią zadania (nie jest to liczba całkowita). Zatem szukane liczby to: –1, 0 , 1, 2.

Zadanie 7
$xy = 168$
$x + y = 31$
$x = 31 - y$
$(31 - y)y = 168$
$y^2 - 31y - 168 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 289$
$\sqrt{\Delta} = 17$
$y_1 = \frac{31+17}{2} = 24$</td></tr>
</table>

Zadanie 8 Znajdź współrzędne wszystkich punktów należących do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 11$, których rzędna jest o 5 większa od odciętej.	$$y_2 = \frac{31 - 17}{2} = 7$$ $x_1 = 7$ $$x_2 = 24$$ Odpowiedź: Są to liczby 7 i 24. **Zadanie 8** (x,y) – (odcięta, rzędna) $$f(x) = y$$ $$y = x + 5$$ $$x + 5 = x^2 - 4x + 11$$ $$0 = x^2 - 5x + 6$$ $\Delta = 1$ $$\sqrt{\Delta} = 1$$ $$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$ $$x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$ $$y_1 = 8$$ $y_2 = 7$ Odpowiedź: Są to współrzędne (2,7) i (3,8).
Podsumowanie: Zadanie pracy domowej : -zadania nie zrealizowane w czasie zajęć -zadanie testowe przygotowane przez nauczyciela	

Klasa 2

Temat lekcji: Ciągi monotoniczne.

Typ lekcji: wprowadzająca;

Czas trwania zajęć: 45 minut

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje definicję ciągu: rosnącego, malejącego, niemalejącego, nierosnącego, stałego;
- potrafi zbadać monotoniczność danego ciągu (a_n).

Metody pracy:

- podające;
- słowne (opowiadanie, pogadanka, opis).

Formy pracy:

- indywidualna;
- praca z całą klasą.

Środki dydaktyczne:

- zestaw zadań przygotowany przez nauczyciela

Scenariusz lekcji

Czynności nauczyciela	**Czynności ucznia**
I. Część wstępna 1. Przywitanie uczniów oraz sprawdzenie listy obecności. Czynności organizacyjno-porządkowe. 2. Podanie celów dzisiejszych zajęć oraz sformułowanie tematu lekcji. 3. Rozwiązywanie zadania 1 przygotowanego przez nauczyciela. Zadanie 1 Poniżej zapisano wzory ogólne trzech ciągów: $a_n = (n-1)(n+3)$ $\qquad b_n = 4n-5$ Zapisz wyrażenia w postaci a_{n+1}, $\quad a_n - a_1$, $\quad b_{n-1}$, $\quad b_{n+1} - b_{n-1}$	Przygotowanie się do zajęć. Uczniowie aktywnie uczestniczą w lekcji, odpowiadają na pytania nauczyciela. $a_{n+1} = (n-1+1)(n+1+3) =$ $= n(n+4) = n^2 + 4n$

4. Definicja: Ciąg (a_n) jest: 1) rosnący, gdy dla każdego $n \in N_+$ $a_{n+1} > a_n$, czyli $a_{n+1} - a_n > 0$ 2) malejący, gdy dla każdego $n \in N_+$ $a_{n+1} < a_n$, czyli $a_{n+1} - a_n < 0$ 3) niemalejący, gdy dla każdego $n \in N_+$ $a_{n+1} \geq a_n$, czyli $a_{n+1} - a_n \geq 0$ 4) nierosnący, gdy dla każdego $n \in N_+$ $a_{n+1} \leq a_n$, czyli $a_{n+1} - a_n \leq 0$ 5) stały, gdy dla każdego $n \in N_+$ $a_{n+1} = a_n$, czyli $a_{n+1} - a_n = 0$ Przykłady: $a_n = 3n - 2$ $a_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = 3n + 1$ $a_{n+1} - a_n = 3n + 1 - (3n - 2) = 3n + 1 - 3n + 2 = 3$ Odp. Różnica $a_{n+1} - a_n$ jest dodatnia, czyli ciąg jest rosnący. $a_n = \frac{1}{n}$ $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{(n+1)n} = \frac{n-n-1}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0$ Odp. Różnica $a_{n+1} - a_n$ jest ujemna dla dowolnego naturalnego n, czyli ciąg jest malejący. **Symbol [a] oznacza część całkowitą liczby a, tzn. największą z liczb całkowitych nie większych niż a. Np. [7] = 7, [5,7] = 5, $\left[-\frac{1}{3}\right]$ = -1, [π] = 3 itd.** $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, czyli (1, 2, 2, 3, 3, …) jest niemalejący. $a_n = 1 - \left[\frac{n}{2}\right]$, czyli (1, 0, 0, -1, -1, …) jest nierosnący Mówimy, że każdy ciąg rosnący jest niemalejącym i każdy ciąg malejący jest nierosnącym. **Ciąg monotoniczny jest to ciąg niemalejący lub nierosnący.**	$a_n - a_1 = (n-1)(n+3) - (1-1)(1+3) =$ $= n^2 + 3n - n - 3 = n^2 + 2n - 3$ $b_{n-1} = 4(n-1) - 5 = 4n - 4 - 5 =$ $= 4n - 9$ $b_{n+1} - b_{n-1} = 4(n+1) - 5 - (4n - 9) =$ $= 4n + 4 - 5 - 4n + 9 = 8$

Przykład ciągu, który nie jest monotoniczny. $a_n = (-1)^n$, czyli (-1, 1, -1, 1, …) **Ciąg stały jest niemalejący i nierosnący.**	
II. Część właściwa 1. Rozwiązywanie zadań przygotowanych przez nauczyciela. Zadanie 2 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n). a) $a_n = -2n + 20$ b) $a_n = 5 - 7n$ c) $a_n = \frac{n}{n+1}$ d) $a_n = n^2 + 4n + 1$ e) $a_n = n^2 - 8n + 7$ f) $a_n = 2 \cdot 5^n - 3$ g) $a_n = 1 + (-1)^n$	Uczniowie wykonują zadania przy tablicy. Rozwiązanie: a) $a_{n+1} = -2(n+1) + 20 = -2n - 2 + 20 = -2n + 18$ $a_{n+1} - a_n = -2n + 18 - (-2n + 20) = -2n + 18 + 2n - 20 = -2$ Różnica $a_{n+1} - a_n < 0$ dla dowolnego naturalnego n, czyli ciąg jest malejący. b) $a_{n+1} = 5 - 7(n+1) = 5 - 7n - 7 = -7n - 2$ $a_{n+1} - a_n = -7n - 2 - (5 - 7n) = -7n - 2 - 5 + 7n = -7$ Różnica $a_{n+1} - a_n < 0$ dla dowolnego naturalnego n, czyli ciąg jest malejący. c) $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + n + n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ Różnica $a_{n+1} - a_n > 0$ dla dowolnego naturalnego n, czyli ciąg jest rosnący. d) $a_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 1 = n^2 + 6n + 6$

	$a_{n+1} - a_n = n^2 + 6n + 6 - (n^2 + 4n + 1) =$ $= n^2 + 6n + 6 - n^2 - 4n - 1 = 2n + 5 > 0$ Różnica $a_{n+1} - a_n > 0$ dla dowolnego naturalnego n, czyli ciąg jest rosnący. e) $a_{n+1} = (n+1)^2 - 8(n+1) + 7 =$ $= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 7 =$ $= n^2 - 6n$ $a_{n+1} - a_n = n^2 - 6n - (n^2 - 8n + 7) =$ $= n^2 - 6n - n^2 + 8n - 7 = 2n - 7$ Wartość wyrażenia może być liczbą dodatnią (np. dla n = 4) lub ujemną (np. dla n = 3). Zatem ciąg nie jest ani rosnący, ani malejący. f) $a_{n+1} = 2 \cdot 5^{n+1} - 3 =$ $= 2 \cdot 5^n \cdot 5 - 3 =$ $= 10 \cdot 5^n - 3$ $a_{n+1} - a_n = 10 \cdot 5^n - 3 - (2 \cdot 5^n - 3) =$ $= 10 \cdot 5^n - 3 - 2 \cdot 5^n + 3 = 8 \cdot 5^n > 0$ Różnica $a_{n+1} - a_n > 0$ dla dowolnego naturalnego n, czyli ciąg jest rosnący. g) $a_{n+1} = 1 + (-1)^{n+1} =$ $= 1 + (-1)^n \cdot (-1) =$ $= 1 - (-1)^n$ $a_{n+1} - a_n = 1 - (-1)^n - 1 - (-1)^n =$ $= -((-1)^n + (-1)^n)$ Wartość wyrażenia może być liczbą dodatnią (np. dla n = 1) lub ujemną (np. dla n = 4). Zatem ciąg nie jest ani rosnący, ani malejący.
III. Część końcowa 1. Podsumowanie tematu dzisiejszych zajęć.	

Klasa 2

Temat: Ciągi monotoniczne.

Cele:

- uczeń podaje definicję ciągu rosnącego, malejącego, niemalejącego, nierosnącego i stałego,
- uczeń stosuje definicję ciągu rosnącego, malejącego, niemalejącego, nierosnącego i stałego w zadaniach,
- uczeń bada monotoniczność ciągów,

Metoda:

- wykładowo-ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- „Matematyka 2 LO podręcznik” E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab
- „Matematyka. Klasa 2. Zbiór zadań - szkoła ponadgimnazjalna”
E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab,

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Część wykładowa</td></tr>
<tr><td align="center">Czynności nauczyciela</td><td align="center">Czynności ucznia</td></tr>
<tr><td>1. Nauczyciel przygotowuję się do lekcji:
• sprawdza listę obecności,
• podaje temat uczniom,
• rozdaję zadania,

2. Nauczyciel określa czym klasa będzie zajmowała się na lekcji i zaczyna część wykładową.

Ponieważ każdy ciąg jest funkcją, więc można dla nich też zdefiniować pojęcie monotoniczności w identyczny sposób. Otrzymujemy w ten sposób definicje ciągu stałego, ciągu rosnącego, ciągu malejącego, ciągu nierosnącego, ciągu niemalejącego, ciągu monotonicznego i ciągu ściśle monotonicznego. Intuicyjnie, wyrazy ciągu rosnącego ciągle się zwiększają, malejącego ciągle maleją.
Aby zbadać monotoniczność ciągu o danym wyrazie ogólnym, należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Jeśli jest ona dodatnia wtedy ciąg jest rosnący, jeśli ujemna ciąg jest malejścy, a jeśli równa 0, to ciąg jest stały.</td><td>1. Uczniowie przygotowują się do lekcji:
• zajmują miejsca,
• przygotowują książki i przybory szkolne,

2. Uczniowie słuchają i zapisują w zeszytach.</td></tr>
</table>

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym**, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n$.

Ciągi: malejące, rosnące, nierosnące, niemalejące noszą wspólną nazwę ciągów monotonicznych lub izotonicznych. Przyjęto również nazywać ciągi malejące lub rosnące ściśle monotonicznymi, ciągi zaś niemalejące lub nierosnące - monotonicznymi w szerszym sensie.

Przykłady:
$a_n = n + 2;\ \ 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ - ciąg rosnący
$a_n = n^2;\ \ 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ - ciąg rosnący
$a_n = 3 - n;\ \ 2, 1, 0, -1, -2, \ldots$ - ciąg malejący
$a_n = -5n;\ \ -5, -10, -15, \ldots$- ciąg malejący

Część ćwiczeniowa

Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
I. Nauczyciel wybiera osoby które rozwiązują zadania na tablicy. (Ilość wykonanych zadań zależy od tempa pracy uczniów) **Zadanie 1** a) $a_n = 3n - 2$ b) $a_n = 5 - 7n$ c) $a_n = n^2 + 4n + 1$ d) $a_n = 5n - 2$ e) $a_n = 3 - 2n$ f) $a_n = \frac{1}{n}$ g) $a_n = \frac{7n-5}{3n-1}$	I. Wskazani uczniowie rozwiązują zadania na tablicy, a reszta klasy w zeszytach. **Zadanie 1** a) $a_n = 3n - 2$ $a_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = 3n + 1$ $a_{n+1} - a_n = (3n + 1) - (3n - 2) =$ $= 3n + 1 - 3n + 2 = 3 > 0$ Ciąg jest rosnący. b) $a_n = 5 - 7n$ $a_{n+1} = 5 - 7(n+1) = 5 - 7n - 7 = -7n - 2$ $a_{n+1} - a_n = (-7n - 2) - (5 - 7n) =$ $= -7n - 2 - 5 + 7n = -7 < 0$

Ciąg jest malejący.

c) $a_n = n^2 + 4n + 1$
$a_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) + 1 =$
$= n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 1 = n^2 + 6n + 6$
$a_{n+1} - a_n = (n^2 + 6n + 6) - (n^2 + 4n + 1) =$
$= n^2 + 6n + 6 - n^2 - 4n - 1 = 2n + 5 > 0$ dla
$n > 0$

Ciąg jest rosnący.

d) $a_n = 5n - 2$
$a_{n+1} = 5(n+1) - 2 = 5n + 5 - 2 = 5n + 3$
$a_{n+1} - a_n = 5n + 3 - (5n - 2) =$
$= 5n + 3 - 5n + 2 = 3 + 2 = 5 > 0$

Ciąg jest rosnący.

e) $a_n = 3 - 2n$
$a_{n+1} = 3 - 2(n+1) = 3 - 2n - 2 = -2n + 1$
$a_{n+1} - a_n = (-2n + 1) - (3 - 2n) =$
$= -2n - 3 + 1 + 2n = -2 < 0$

Ciąg jest malejący.

f) $a_n = \frac{1}{n}$
$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{(n+1)n} - \frac{n+1}{(n+1)n} = \frac{n-n-1}{(n+1)n} =$
$= \frac{-1}{(n+1)n} < 0, dla\ n \in N$

Ciąg jest malejący.

g) $a_n = \frac{7n-5}{3n-1}$
$a_{n+1} = \frac{7(n+1)-5}{3(n+1)-1} = \frac{7n+7-5}{3n+3-1} = \frac{7n+2}{3n+2}$
$a_{n+1} - a_n = \frac{7n-5}{3n-1} - \frac{7n+2}{3n+2} =$
$= \frac{(7n+2)(3n-1)}{(3n+2)(3n-1)} - \frac{(3n+2)(7n-5)}{(3n+2)(3n-1)} = \cdots = \frac{8}{(3n+2)(3n-1)} > 0$
$dla\ n \in N$

Ciąg jest rosnący.

Zadanie 2

Zadanie 2
Ciąg jest rosnący gdy:

Ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = n + n^2$. Wykaż że jest to ciąg rosnący. II. Nauczyciel podaję pracę domową (zadania które nie zostały zrobione na zajęciach).	$a_{n+1} - a_n > 0$ $a_n = n + n^2$ $a_{n+1} = n + 1 + (n+1)^2 = n + 1 + n^2 + 2n + 1 =$ $= n^2 + 3n + 2$ $a_{n+1} - a_n = n^2 + 3n + 2 - (n + n^2) =$ $= n^2 + 3n + 2 - n - n^2 = 2n + 2 > 0 \ dla \ n \in N$ Odpowiedź: Wykazaliśmy, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdego n naturalnego, zatem ciąg jest rosnący. II. Uczniowie zapisują pracę domową.

Klasa 2

Temat: Ciąg arytmetyczny.

Typ lekcji: wprowadzająca,
Czas trwania zajęć: 1 godzina lekcyjna (45 minut).

CELE NAUCZANIA

Cel ogólny :

- rozwiązywanie zadań dotyczących ciągu arytmetycznego.

Cele szczegółowe :

Uczeń:

- bada monotoniczność ciągu arytmetycznego;

- zapisuje dowolne wyrazy ciągu arytmetycznego, gdy dana jest różnica i dowolny wyraz tego ciągu bądź tylko dwa dowolne wyrazy;

- oblicza różnicę ciągu arytmetycznego mając dany pierwszy wyraz i dowolny wyraz tego ciągu.

Cele intelektualne:

- Wyrobienie sprawności rachunkowych.

Cele wychowawcze:

- Rozwijanie umiejętności poprawnego formułowania myśli.

Metody pracy:

- Metoda podająca,
- Metoda treningowa – rozwiązywanie zadań.

Formy pracy:

- Indywidualna,
- Praca z całą klasą.

Środki dydaktyczne:

- Kata pracy,
- Zeszyty,
- Tablica, kreda.

Przebieg lekcji

Ogniwo lekcji	Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
1.Czynności Organizacyjne	Sprawdza obecność uczniów na lekcji, zaznacza ewentualne nieobecności.	Zgłasza nieobecność kolegów.
2.Część wstępna: a) zapoznanie z celami lekcji b)sformułowanie tematu lekcji c)wprowadzenie wiadomości	a)Celem dzisiejszej lekcji jest rozwiązywanie zadań dotyczących ciągu arytmetycznego. b)Podaje temat „Ciąg arytmetyczny”. Definicja Ciąg liczbowy (an) nazywamy **ciągiem arytmetycznym** wtedy i tylko wtedy gdy każdy jego wyraz z wyjątkiem pierwszego powstaje z wyrazu poprzedniego przed dodanie stałej liczby r (różnicy ciągu). $a_{n+1} = a_n + r$ Wzory na n-ty wyraz oraz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to miedzy sąsiednimi wyrazami ciągu zachodzi związek: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ dla $n \geq 2$ Jeśli r>0 to ciąg arytmetyczny jest rosnący. Jeśli r<0 to ciąg jest malejący. Jeśli r = 0 ciąg arytmetyczny jest ciągiem o jednakowych wyrazach czyli jest ciągiem stałym.	a) Przewiduje czego będzie dotyczyła lekcja. b)Zapisuje temat lekcji. c)Patrzy na tablicę i sporządza notatki.
3. Część główna:		

a)rozwiązywanie zadań na tablicy	a)Kontroluje prace uczniów i koryguje błędy.	a)-Rozwiązuje zadania na tablicy. -Zapisuje rozwiązania w zeszycie.
	Zadanie 1 (Karta pracy). Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego: a) $a_n = 3n+1$ b) $a_n = 3-2n$ c) $a_n = 5n-2$	Zadanie 1 (Karta pracy). Rozwiązanie: a) $a_{n+1} = 3(n+1)+1 = 3n+3+1 =$ $= 3n+4$ $a_{n+1} - a_n = 3n+4-3n-1 = 3$ Różnica $a_{n+1} - a_n > 0$, czyli ciąg jest rosnący. b) $a_{n+1} = 3-2(n+1) = 3-2n-2 =$ $= 1-2n$ $a_{n+1} - a_n = 1-2n-3+2n = -2$ Różnica $a_{n+1} - a_n < 0$, czyli ciąg jest malejący. c) $a_{n+1} = 5(n+1)-2 = 5n+5-2 =$ $= 5n+3$ $a_{n+1} - a_n = 5n+3-5n+2 = 5$ Różnica $a_{n+1} - a_n > 0$, czyli ciąg jest rosnący.
	Zadanie 2 (Karta pracy). Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = -2n+1$ dla $n \geq 1$. Oblicz różnice tego ciągu.	Zadanie 2 (Karta pracy). Rozwiązanie: $a_{n+1} = -2(n+1)+1 = -2n-2+1$ $= -2n-1$ $a_{n+1} - a_n = -2n-1+2n-1 = -2$ Odp. Różnica ciągu arytmetycznego jest równa -2.
	Zadanie 3 (Karta pracy). Znajdź trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego, jeśli $a_2 = 3$ oraz $a_6 = 4$.	Zadanie 3 (Karta pracy). Rozwiązanie: $\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_6 = a_1 + 5r \end{cases}$ $\begin{cases} 3 = a_1 + r \\ 4 = a_1 + 5r \end{cases}$ $\begin{cases} -3 = -a_1 - r \\ 4 = a_1 + 5r \end{cases}$ $1 = 4r$ $r = \frac{1}{4}$

		$3 = a_1 + \frac{1}{4}$ $a_1 = 2\frac{3}{4}$ $a_{13} = a_1 + 12r$ $a_{13} = 2\frac{3}{4} + 12 \cdot \frac{1}{4}$ $a_{13} = 5\frac{3}{4}$
	Zadanie 4 (Karta pracy). Suma czwartego i siódmego wyrazu ciągu arytmetycznego równa jest 86 a suma drugiego i trzynastego wynosi 22 . Znajdź pierwszy wyraz i różnice tego ciągu.	Zadanie 4 (Karta pracy). Rozwiązanie: $\begin{cases} a_4 + a_7 = 86 \\ a_2 + a_{13} = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 3r + a_1 + 6r = 86 \\ a_1 + r + a_1 + 12r = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a_1 + 9r = 86 \\ 2a_1 + 13r = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} -2a_1 - 9r = -86 \\ 2a_1 + 13r = 22 \end{cases}$ $4r = -64$ $r = -16$ $2a_1 + 9 \cdot (-16) = 86$ $2a_1 = 86 + 144$ $2a_1 = 230$ $a_1 = 115$
	Zadanie 5 (Karta pracy). Wyznacz różnicę r ciągu arytmetycznego mając dane: a) $a_1 = 7 \quad a_{29} = 133$ b) $a_1 = 28{,}5 \quad a_{46} = 6$ c) $a_1 = 12\sqrt{3} \quad a_{16} = 42\sqrt{3}$	Zadanie 5 (Karta pracy). Rozwiązanie: a) $a_{29} = a_1 + 28r$ $133 = 7 + 28r$ $28r = 126$ $r = 4{,}5$ b)

		$a_{46} = a_1 + 45r$ $6 = 28{,}5 + 45r$ $45r = -22{,}5$ $r = -0{,}5$ c) $a_{16} = a_1 + 15r$ $42\sqrt{3} = 12\sqrt{3} + 15r$ $15r = 30\sqrt{3}$ $r = 2\sqrt{3}$
4.Część końcowa: a)Podsumowanie lekcji	a)Zadaje pytania związane z tematem lekcji i ocenia aktywność uczniów.	a)Odpowiada na pytania dotyczące tematu lekcji.

Klasa 2

Temat: Ciąg arytmetyczny.

Cele:

- uczeń podaje definicję ciągu arytmetycznego,
- uczeń podaje definicje monotoniczności ciągu arytmetycznego,
- uczeń podaje wzór na wyraz środkowy ciągu i stosuje je w zadaniach,
- uczeń stosuje definicję ciągu arytmetycznego w zadaniach,
- uczeń sprawdza czy ciąg jest arytmetyczny,
- uczeń znajduje pierwszy i kolejne wyrazy ciągów oraz różnicę ciągu,

Metoda:

- ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- „Matematyka 2 LO podręcznik” E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab
- „Matematyka. Klasa 2. Zbiór zadań - szkoła ponadgimnazjalna”
E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab,

Część wykładowa	
Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
1. Nauczyciel przygotowuję się do lekcji: • sprawdza listę obecności, • podaje temat uczniom, • rozdaję zadania,	1. Uczniowie przygotowują się do lekcji: • zajmują miejsca, • przygotowują książki i przybory szkolne,
2. Nauczyciel określa czym klasa będzie zajmowała się na lekcji i zaczyna część powtórzeniową, w której zadaje pytania uczniom. • Co to ciąg arytmetyczny? • Jak obliczamy środkowy wyraz ciągu? • Jak określamy monotoniczność ciągu arytmetycznego?	2. Uczniowie odpowiadają na pytania. • Ciąg liczbowy (an) nazywamy ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy gdy każdy jego wyraz z wyjątkiem pierwszego powstaje z wyrazu poprzedniego przed dodanie stałej liczby r tzn: a_{n+1}= a_{n+r}dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n. Ciąg arytmetyczny musi składać się z co najmniej trzech wyrazów. • $a_n = \frac{a_n-1+a_n+1}{2}$ • Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego. Jeśli r>0 to ciąg arytmetyczny jest rosnący. Jeśli r<0 to ciąg jest malejący. Jeśli r = 0 ciąg arytmetyczny jest ciągiem o jednakowych wyrazach czyli jest ciągiem

	stałym.
Część ćwiczeniowa	
Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
I. Nauczyciel wybiera osoby które rozwiązują zadania ze zbioru na tablicy. (Ilość wykonanych zadań zależy od tempa pracy uczniów) **Zadanie 7.29/231** Które z podanych ciągów są ciągami arytmetycznymi? a) a_n=3n +1 b) $a_n=\frac{2n-\sqrt{2}}{3}$ f) $a_n=\sqrt{2n}$	I. Wskazani uczniowie rozwiązują zadania ze zbioru na tablicy, a reszta klasy w zeszytach. **Zadanie 7.29/231** a) $a_n = 3n + 1$ $a_1 = 3 * 1 + 1$ $a_1 = 3 + 1$ $a_1 = 4$ $a_2 = 3 * 2 + 1$ $a_2 = 7$ $a_3 = 3 * 3 + 1$ $a_3 = 10$ jest to ciąg arytmetyczny b) $a_n = \frac{2n-\sqrt{2}}{3}$ $a_1 = \frac{2*1-\sqrt{2}}{3}$ $a_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$ $a_2 = \frac{2*2-\sqrt{2}}{3}$ $a_2 = \frac{4-\sqrt{2}}{3}$ $a_3 = \frac{2*3-\sqrt{2}}{3}$ $a_3 = \frac{6-\sqrt{2}}{3}$ jest to ciąg arytmetyczny f) $a_n = \sqrt{2n}$ $a_1 = \sqrt{2 * 1}$ $a_1 = \sqrt{2}$

Zadanie 7.30/232 Znajdz trzynasty wyraz ciagu arytmetycznego a) $a_2 = 3$, $a_6 = 4$	$a_2 = \sqrt{2*2}$ $a_2 = \sqrt{4}$ $a_2 = 2$ $a_3 = \sqrt{2*3}$ $a_3 = \sqrt{6}$ $a_4 = \sqrt{2*4}$ $a_4 = \sqrt{8}$ nie jest to ciąg arytmetyczny **Zadanie 7.30/232** c) $a_2 = 3$ $a_6 = 4$ $a_2 = a_1 + r$ $a_6 = a_1 + 5r$ $3 = a_1 + (2-1)r$ $4 = a_1 + (6-1)r$ $3 = a_1 + r$ $4 = a_1 + 5r$ $a_1 = 3 - r$ $3 - r + 5r = 4$ $a_1 = 3 - r$ $r = \frac{1}{4}$ $a_1 = 3 - \frac{1}{4}$ $r = \frac{1}{4}$ $a_1 = 2\frac{3}{4}$ $r = \frac{1}{4}$ $a_{13} = a_1 + (13-1)*\frac{1}{4}$ $a_{13} = 2\frac{3}{4} + 12*\frac{1}{4}$ $a_{13} = 2\frac{3}{4} + 3$ $a_{13} = 5\frac{3}{4}$

Zadanie 7.31/ 232

Wyznaczyć pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego mając dane:

a) $a_{22} = -93$, $r = -3$

d) $a_{111} = 44$, $r = 1{,}25$

Zadanie 7.32/232

Wyznacz różnicę r ciągu arytmetycznego mając dane:

b) $a_1 = 12$, $a_{34} = 65$

Zadanie 7.33/232

Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu arytmetycznego wiedząc, że:

a) $a_1 = 2{,}3$, $a_n = 48{,}8$, $r = 3{,}1$

Zadanie 7.31/ 232

a)

$a_{22} = -93$
$r = -3$
$a_1 = ?$

$a_{22} = a_1 + (22 - 1) * (-3)$
$-93 = a_1 - 63$
$a_1 = -93 + 63$
$a_1 = -30$

d)

$a_{111} = 44$
$r = 1{,}25$
$a_1 = ?$
$a_{111} = a_1 + (111 - 1) * 1{,}25$
$44 = a_1 + (111 - 1) * 1{,}25$
$44 = a_1 + 110 * 1{,}25$
$44 = a_1 + 125$
$a_1 = 44 - 125$
$a_1 = 81$

Zadanie 7.32/232

b)

$a_1 = 12$
$a_{34} = 65$

$a_{34} = a_1 + (34 - 1) * r$
$65 = 12 + 33 * r$
$65 - 12 = 33r$
$53 = 33r \quad /:33$
$r = \frac{53}{33}$

Zadanie 7.33/232

b)

$a_1 = 2{,}3$
$a_n = 48{,}8$
$r = 3{,}1$

$a_n = a_1 + (n - 1) * r$
$48{,}8 = 2{,}3 + (n - 1) * 3{,}1$
$48{,}8 = 2{,}3 + 3{,}1n - 3{,}1$
$3{,}1n = 48{,}8 - 2{,}3 + 3{,}1$
$3{,}1n = 49{,}6 \quad /:3{,}1$
$n = 16$
$a_{16} = 48{,}8$

Zadanie 7.34/ 232
Między liczbą 4 a 22 wstaw pięć liczb tak, aby wraz z danymi liczbami tworzyły ciąg arytmetyczny

Zadanie 7.37/232
Suma czwartego i siódmego wyrazu ciągu arytmetycznego równa jest 86 a suma drugiego i trzynastego wynosi 22 . Znajdź pierwszy wyraz i różnice tego ciągu.

Zadanie 7. 40/233
W ciągu arytmetycznym składającym się z dziewięciu wyrazów suma trzech pierwszych wyrazów równa się 15, a suma trzech kolejnych

Zadanie 7.34/ 232

$a_1 = 4, a_2 =?, a_3 =?, a_4 =?, a_5 =?, a_6 =?,$
$a_7 = 22$

$r = \frac{an-a1}{n-1}$
$r = \frac{22-4}{7-1}$
$r = 3$

$a_2 = 4 + 3 = 7$
$a_3 = 7 + 3 = 10$
$a_4 = 10 + 3 = 13$
$a_5 = 13 + 3 = 16$
$a_6 = 16 + 3 = 19$

Zadanie 7.37/232

$a_4 + a_7 = 86$
$a_2 + a_{13} = 22$
$a_1 =?$
$R =?$

$a_4 + a_7 = 86$
$a_2 + a_{13} = 22$

$a_1 + 3r + a_1 + 6r = 86$
$a_1 + r + a_1 + 12r = 22$

$2a_1 + 9r = 86$
$2a_1 + 13r = 22 \quad /* (-1)$

$2a_1 + 9r = 86$
$-2a_1 - 13r = -22$

$-4r = 64 \quad /: (-4)$
$r = -16$

$2a_1 + 9 * (-16) = 86$
$2a_1 - 144 = 86$
$2a_1 = 86 + 144$
$2a_1 = 230 \quad /: 2$
$a_1 = 115$

Zadanie 7. 40/233

$a_1 + a_2 + a_3 = 15$
$a_4 + a_5 + a_6 = 42$
$a_7 + a_8 + a_9 =?$

$a_1 + a_2 + a_3 = 15$

42. Oblicz sumą trzech ostatnich wyrazów tego ciągu. II. Nauczyciel podaję pracę domową ze zbioru zadań. **Zadanie 7.29/231** Które z podanych ciągów są ciągami arytmetycznymi? c) a_n= 7 d)a_n=2n e)a_n= $7n^2$- 7 g)a_n= ∏n + ∏ h)a_n= $\frac{2n^2+4n+2}{n+1}$ i)a_n= $\frac{n}{n^2+6}$	$a_4+a_5+a_6=42$ $a_1+a_1+r+a_1+2r=15$ $a_1+3r+a_1+4r+a_1+5r=42$ $3a_1+3r=15$ $a_1+12r=42 \quad /*(-1)$ $3a_1+3r=15$ $-a_1-12r=-42$ $-9r=-27$ $r=3$ $3a_1+3*3=15$ $3a_1=6 \quad /:3$ $a_1=2$ $a_7=a_1+6r$ $a_7=2+6*3$ $a_7=20$ $a_8=20+3$ $a_8=23$ $a_9=23+30$ $a_9=26$ $a_7+a_8+a_9=20+23+26=69$ II. Uczniowie zapisują pracę domową.

Zadanie 7.30/232 Znajdz trzysnasty wyraz ciągu arytmetycznego a)a_1= -1, r=3 b)a_1= 10, r=-2 d)a_5=0, a_6= -1,5 **Zadanie 7.32/232** Wyznacz różnicę r ciągu arytmetycznego mając dane: a)a_1= 7, a_{29}=133 c)a_1=28,5 a_{46}= 6 d)a_1= $3\sqrt{3}$ a_{16}=$-42\sqrt{3}$ **Zadanie 7.35/232** Między liczbą 65 i 35 wstaw dziewięć liczb tak, aby wraz zdanymi liczbami tworzyły ciąg arytmetyczny	

Klasa 2

Temat:

Ciąg arytmetyczny.

Cele ogólne:

- kształcenie umiejętności logicznego myślenia,

- ćwiczenie sprawności rachunkowych,

Cele szczegółowe:

- poznanie przez uczniów definicji ciągu arytmetycznego,

- poznanie przez uczniów podstawowych wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego,

- ćwiczenie umiejętności stosowania poznanych wiadomości w zadaniach.

Metody:

- pogadanka,

- ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- wprowadzająca.

Środki dydaktyczne:

- zestawy zadań dla uczniów.

Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
Temat: Ciąg arytmetyczny. Nauczyciel zapisuje na tablicy ciąg liczb: 2, 5, 8, 11, 14, 17, … Czy widzicie jakąś zależność między poszczególnymi wyrazami tego ciągu? Podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Nauczyciel dyktuje uczniom definicję: Ciąg arytmetyczny jest to ciąg liczbowy, w którym każdy wyraz można otrzymać dodając wyraz bezpośrednio go poprzedzający oraz ustaloną liczbę, zwaną różnicą ciągu.	Każdy następny wyraz jest o 3 większy niż poprzedni.

Różnicę oznaczamy literką r i określa on zależność: $r = a_{n+1} - a_n$. Wracając do podanego ciągu wypiszcie kolejne jego wyrazy opisując je przy użyciu wyrazu pierwszego. Dla dowolnego ciągu arytmetycznego zachodzi zależność: $a_n = a_1 + (n-1)r$ – wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego.	 $a_1 = 2$ $a_2 = a_1 + 3$ $a_3 = a_2 + 2 \cdot 3 = a_1 + 6$ $a_4 = a_3 + 3 \cdot 3 = a_1 + 9$
Zad. 1 Sprawdź, czy podany ciąg jest arytmetyczny? a) $a_n = 3n + 2$ b) $b_n = 2n$ c) $c_n = 6 \cdot n^2$ **Zad. 2** Wyznacz wzór na n-ty wyraz podanego ciągu: a) -4, -2, 0, 2, 4, 6, … b) 5, 1, -3, -7, -11, … **Zad. 3** Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, jeśli: a) r=-3, a_{22}=-92 b) r=5 4/9, a_{17}=100 2/9 c) r=0,4, a_{39}=15,4	 a) $r = 3(n+1) + 2 - 3n - 2 = 3$ tak b) $r = 2(n+1) - 2n = 2$ tak c) $r = 6(n+1)^2 - 6n^2 = 6n^2 + 12n + 6 - 6n^2 = 12n + 6$ nie a) $a_1 = -4$ $r = -2 — 4 = 2$ $a_n = -4 + (n-1) \cdot 2$ $a_n = -4 + 2n - 2$ $a_n = 2n - 6$ b) $a_1 = 5$ $r = -4$ $a_n = 5 + (n-1)(-4)$ $a_n = 5 - 4n + 4$ $a_n = -4n + 9$ a) $-92 = a_1 + 21 \cdot (-3)$ $-92 = a_1 - 63$ $a_1 = -29$ b) $100\frac{2}{9} = a_1 + 16 \cdot 5\frac{4}{9}$ $\frac{902}{9} = a_1 + 16 \cdot \frac{49}{9}$ $a_1 = \frac{902}{9} - \frac{784}{9}$ $a_1 = 13\frac{1}{9}$

Zad. 4 Wyznacz różnicę ciągu arytmetycznego, jeśli: a) $a_1=-12$, $a_{34}=65$ b) $a_1=3/7$, $a_{99}=21\ 3/7$ **Zad. 5** Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu arytmetycznego, jeśli: a) $a_1=5$, $a_n=61$, $r=7$ b) $a_1=2,3$, $a_n=48,8$, $r=3,1$	c) $15{,}4 = a_1 + 38 \cdot 0{,}4$ $a_1 = 15{,}4 - 15{,}2$ $a_1 = 0{,}2$ a) $65 = -12 + 33r$ $33r = 77$ $r = 2\frac{1}{3}$ b) $21\frac{3}{7} = \frac{3}{7} + 98r$ $98r = 21$ $r = \frac{21}{98} = \frac{3}{14}$ a) $61 = 5 + (n-1) \cdot 7$ $61 = 5 + 7n - 7$ $7n = 63$ $n = 9$ b) $48{,}8 = 2{,}3 + (n-1) \cdot 3{,}1$ $48{,}8 = 2{,}3 + 3{,}1n - 3{,}1$ $3{,}1n = 49{,}6$ $n = 16$
Powtórzenie Nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące lekcji.	Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela.

Klasa 2

Temat:

Ciąg arytmetyczny- zadania różne.

Cele ogólne:

- kształcenie umiejętności logicznego myślenia,

- ćwiczenie sprawności rachunkowych,

Cele szczegółowe:

- przypomnienie wiadomości dotyczących ciągu arytmetycznego,

- ćwiczenie umiejętności stosowania poznanych wzorów i własności ciągu arytmetycznego w zadaniach.

Metody:

- ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- powtórzeniowa.

Środki dydaktyczne:

- zestawy zadań dla uczniów.

Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
Temat: Ciąg arytmetyczny- zadania różne.	
Jaki ciąg nazywamy arytmetycznym?	Ciąg arytmetyczny jest to taki ciąg, w którym różnica między kolejnymi wyrazami jest stała.
Przypomnijcie wszystkiego poznane wzory dotyczące ciągu arytmetycznego.	Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego: $a_n = a_1 + (n-1)$ Związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego: $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ Suma ciągu arytmetycznego: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

<table>
<tr>
<td>

Zad. 1
Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym x+y=8. Oblicz x i y.

</td>
<td>

Zad. 1
$\begin{cases} 2y = x + 19 \\ x + y = 8 \end{cases}$
$\begin{cases} x = 2y - 19 \\ 2y - 19 + y = 8 \end{cases}$
$3y = 27$
$y = 9$
$x = 2 \cdot 9 - 19$
$x = -1$
$\begin{cases} x = -1 \\ y = 9 \end{cases}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Zad. 2
Wyrazami ciągu arytmetycznego a_n są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto a_3=12. Oblicz a_{15}.

</td>
<td>

Zad. 2
$a_3 = 12$
$r = 5$
$a_2 = 7$
$a_1 = 2$
$a_{15} = a_1 + 14r$
$a_{15} = 2 + 14 \cdot 5$
$a_{15} = 72$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Zad. 3
Miary kątów trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Najmniejszy kąt tego trójkąta ma miarę 40˚. Oblicz różnicę tego ciągu.

</td>
<td>

Zad. 3
$a_1 = 40°$
$a_2 = 40° + r$
$a_3 = 40° + 2r$
$40° + 40° + r + 40° + 2r = 180°$
$3r = 60°$
$r = 20°$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Zad. 4
Dany jest ciąg a_n o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5-3n}{7}$, dla n = 1, 2, 3, ….
a) Sprawdź, czy ciąg a_n jest arytmetyczny.
b) Wyznacz jedenasty wyraz tego ciągu.

</td>
<td>

Zad. 4
a) $r = a_{n+1} - a_n = \frac{5-3(n+1)}{7} - \frac{5-3n}{7} = -\frac{3}{7}$
Odp. Ciąg jest arytmetyczny.
b) $a_1 = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$
$a_{11} = a_1 + 10r$
$a_{11} = \frac{2}{7} + 10 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$
$a_{11} = \frac{2}{7} - \frac{30}{7}$
$a_{11} = -4$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Zad. 5
Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie

</td>
<td>

Zad. 5
$\frac{n + 15}{11} = 1{,}6$

</td>
</tr>
</table>

ogólnym $a_n = \frac{n+15}{11}$. Sprawdź, czy istnieje wyraz tego ciągu równy 1,6.	$n + 15 = 17{,}6$ $n = 2{,}6$ Odp. Nie.
Zad. 6 Liczby x-1, 2x, x+3 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz x.	**Zad. 6** $2 \cdot 2x = x - 1 + x + 3$ $4x = 2x + 2$ $x = 1$
Zad. 7 Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym a_3=7, a_{13}-a_9=20.	**Zad. 7** $\begin{cases} a_3 = 7 \\ a_{13} - a_9 = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 2r = 7 \\ a_1 + 12r - a_1 - 8r = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 2r = 7 \\ 4r = 20 \end{cases}$ $r = 5$ $a_1 = 7 - 10 = -3$ $a_7 = -3 + 6 \cdot 5 = 27$ $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$ $S_7 = \frac{-3 + 27}{2} \cdot 7$ $S_7 = 84$
Zad. 8 Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy $2\log_2 8$, a siódmy wyraz to: $\frac{6-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + 8\sqrt{3}$. Wyznacz ten ciąg. Suma ilu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 14550?	**Zad. 8** $a_4 = 2log_2 8 = 6$ $a_7 = \frac{6 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + 8\sqrt{3} = 15$ $\begin{cases} a_1 + 3r = 6 \\ a_1 + 6r = 15 \end{cases}$ $3r = 9$ $r = 3$ $a_1 = 6 - 3 \cdot 3 = -3$ $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$ $14550 = \frac{2 \cdot (-3) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$ 29100= (-6+3n-3)n $3n^2 - 9n - 29100 = 0$ $n^2 - 3n - 9700 = 0$ $\Delta = 9 + 4 \cdot 9700 = 38809$ $\sqrt{\Delta} = 197$

Zad. 9 Wyznacz liczby x i y wiedząc, że ciąg (4, x-y, x+y, 19)jest arytmetyczny. **Zad. 10** Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, jeśli $a_3+a_5=24$; $a_3 \cdot a_5=135$.	$n_1=\frac{3-197}{2}=-97$ $n_2=\frac{3+197}{2}=100$ Odp. n=100. **Zad. 9** $\begin{cases} 2(x-y)=4+x+y \\ 2(x+y)=x-y+19 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-2y=4+x+y \\ 2x+2y=x-y+19 \end{cases}$ $4x=23+2x$ $2x=23$ $x=11{,}5$ $2\cdot 11{,}5-2y=4+11{,}5+y$ $-3y=-7{,}5$ $y=2{,}5$ **Zad. 10** $\begin{cases} a_1+2r+a_1+4r=24 \\ (a_1+2r)(a_1+4r)=135 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a_1+6r=24 \\ a_1^2+6a_1r+8r^2=135 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1=12-3r \\ (12-3r)^2+6r(12-3r)+8r^2=135 \end{cases}$ $144-72r+9r^2+72r-18r^2+8r^2=135$ $r^2=9$ $r=3 \;\; lub \;\; r=-3$ $a_1=3 \;\; lub \;\; a_1=21$
Podsumowanie: Nauczyciel zadaje pytania uczniom dotyczące lekcji.	Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela.
Praca domowa Zad. 1 Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, jeśli $a_9-a_6=21$; $a_9 \cdot a_6=2146$.	Zad. 1 $\begin{cases} a_1+8r-a_1-5r=21 \\ (a_1+8r)(a_1+5r)=2146 \end{cases}$

Zad. 2 W ciągu arytmetycznym wyraz trzeci wynosi 4, a szósty 19. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu są mniejsze od 200.	$\begin{cases} r = 7 \\ (a_1 + 56)(a_1 + 35) = 2146 \end{cases}$ $a_1^2 + 91a_1 - 186 = 0$ $\Delta = 8281 + 744 = 9025$ $\sqrt{\Delta} = 95$ $a_1 = \frac{-91 + 95}{2} = 2$ $a_2 = \frac{-91 - 95}{2} = -93$ Zad. 2 $\begin{cases} a_3 = 4 \\ a_6 = 19 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 2r = 4 \\ a_1 + 5r = 19 \end{cases}$ $3r = 15$ $r = 5$ $a_1 = 4 - 10 = -6$ $a_n = -6 + (n - 1) \cdot 5$ $a_n = 5n - 11$ $5n - 11 < 200$ $5n < 189$ $n < 37{,}8$ $n \in \{1, 2, \dots, 37\}$

Klasa 2

Temat: Ciąg arytmetyczny- zadania różne.

Cele:

- uczeń podaje definicję ciągu arytmetycznego,
- uczeń podaje definicje monotoniczności ciągu arytmetycznego,
- uczeń podaje wzór na wyraz środkowy ciągu i stosuje je w zadaniach,
- uczeń stosuje definicję ciągu arytmetycznego w zadaniach,
- uczeń sprawdza czy ciąg jest arytmetyczny,
- uczeń znajduje pierwszy i kolejne wyrazy ciągów oraz różnicę ciągu,
- uczeń podaje wzór na sumę ciągu arytmetycznego,
- uczeń wykorzystuje wzór na sumę ciągu arytmetycznego w zadaniach,

Metoda:
- ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:
- „Matematyka 1 LO podręcznik” E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab
- „Matematyka. Klasa 1. Zbiór zadań - szkoła ponadgimnazjalna”
E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab,

Część wykładowa	
Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
1. Nauczyciel przygotowuję się do lekcji: • sprawdza listę obecności, • podaje temat uczniom, • rozdaję zadania,	1. Uczniowie przygotowują się do lekcji: • zajmują miejsca, • przygotowują książki i przybory szkolne,
2. Nauczyciel określa czym klasa będzie zajmowała się na lekcji i zaczyna część powtórzeniową, w której zadaje pytania uczniom. • Co to ciąg arytmetyczny? • Jak obliczamy środkowy wyraz ciągu? • Jak określamy monotoniczność ciągu arytmetycznego?	2. Uczniowie odpowiadają na pytania. • Ciąg liczbowy (an) nazywamy ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy gdy każdy jego wyraz z wyjątkiem pierwszego powstaje z wyrazu poprzedniego przed dodanie stałej liczby r tzn: a_{n+1}= a_{n+r}dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n. Ciąg arytmetyczny musi składać się z co najmniej trzech wyrazów. • $a_n = \frac{a_n-1+a_n+1}{2}$ • Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego. Jeśli r>0 to ciąg arytmetyczny jest rosnący.

• Jaki jest wzór na sumę ciągu arytmetycznego?	Jeśli r<0 to ciąg jest malejący. Jeśli r = 0 ciąg arytmetyczny jest ciągiem o jednakowych wyrazach czyli jest ciągiem stałym. • $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} * n$
Część ćwiczeniowa	
Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
I. Nauczyciel wybiera osoby które rozwiązują zadania na tablicy. (Ilość wykonanych zadań zależy od tempa pracy uczniów) **Zadanie 1** Wyznacz ciąg arytmetyczny, mając dane: $a_5 = 19$ i $a_9 = 35$. **Zadanie 2** Określ monotoniczność ciągu. a) $a_n = 2n + 3$ b) $a_n = -3n + 2$ **Zadanie 3** Określ, czy podany ciąg, jest ciągiem arytmetycznym. a) 3, 4, 5, 6, … b) -2, 3, 9, …	I. Wskazani uczniowie rozwiązują zadania na tablicy, a reszta klasy w zeszytach. **Zadanie 1** $a_n = a_1 + (n-1)r$ $a_5 = a_1 + 4r$ $a_9 = a_1 + 8r$ $\begin{cases} 19 = a_1 + 4r \\ 35 = a_1 + 8r \end{cases}$ $\begin{cases} r = 4 \\ a_1 = 3 \end{cases}$ $a_n = 3 + 4(n-1)$ $a_n = 4n - 1$ **Zadanie 2** a) $a_n = 2n + 3$ $a_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 2 + 3 = 2n + 5$ $a_{n+1} - a_n = 2n + 5 - 2n - 3 = 2 > 0$ Ciąg jest rosnący b) $a_n = -3n + 2$ $a_{n+1} = -3(n+1) + 2 = -3n + 2 - 3 = -3n - 1$ $a_{n+1} - a_n = -3n - 1 + 3n - 2 = -2 < 0$ Ciąg jest malejący **Zadanie 3** a) 3, 4, 5, 6, … $4 - 5 = 5 - 4 = 6 - 5$ $1 = 1 = 1$ Podany ciąg jest arytmetyczny

	b) -2, 3, 9, … $3-(-2)=9-3$ $3+2=9-3$ $5\neq 6$ Podany ciąg nie jest arytmetyczny
Zadanie 4 Dla jakiej wartości "x" podane wyrażenia są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? $x+1, 2x+6, x+21, \dots$	**Zadanie 4** $x+1, 2x+6, x+21, \dots$ $2x+6-(x+1)=x+21-(2x+6)$ $2x+6-x-1=x+21-2x-6$ $x+5=-x+15$ $2x=10$ $x=5$ Odpowiedź: Wyrażenia stanowią kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego dla x=5.
Zadanie 5 Podaj wzór ogólny i oblicz wartość dwunastego wyrazu ciągu: $-11, -7, -3, 1, \dots$	**Zadanie 5** $-11, -7, -3, 1, \dots$ $a_1=-11$ $r=-7-(-11)=-7+11=4$ $a_n=-11+(n-1)*4$ $a_n=4n-15$ $a_{12}=4*12-15=33$
Zadanie 6 Oblicz wartość piątego wyrazu ciągu arytmetycznego, jeżeli jego czwarty wyraz ma wartość 20, a szósty ma wartość 28.	**Zadanie 6** $a_4=20$ $a_6=28$ $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ $a_5=\frac{a_4+a_6}{2}$ $a_5=\frac{20+28}{2}$ $a_5=\frac{48}{2}$ $a_5=24$
Zadanie 7 Oblicz sumę wyrazów, tworzących ciąg arytmetyczny: $12+9+6+\cdots-6$	**Zadanie 7** $12+9+6\dots-6$ $a_1=12$ $a_n=-6$ $r=9-12=-3$

II. Nauczyciel podaję pracę domową (zadania które nie zostały zrobione na zajęciach).	$a_n = a_1 + (n-1)r$ $-6 = 12 + (n-1) * (-3)$ $-6 = 12 - 3n + 3$ $-6 = -3n + 15$ $3n = 15 + 6$ $3n = 21$ $n = 7$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$ $S_7 = \frac{12-6}{2} * 7 = \frac{6}{2} * 7 = 3 * 7 = 21$ II. Uczniowie zapisują pracę domową.

Klas 3

Temat: Własności ciągu arytmetycznego (przygotowanie do matury).

Czas: Jedna godziny lekcyjne.

Cele:

- utrwalenie wiadomości o ciągach arytmetycznych,
- zastosowanie pojęć dotyczących ciągów arytmetycznych,
- zastosowanie wzorów dla ciągu arytmetycznego w zadaniach typowych i nietypowych;

Metody:

- rozmowa kierowana,
- metoda ćwiczeniowa.

Typ lekcji:

- powtórzeniowo-ćwiczeniowa.

Środki dydaktyczne:

- Zadania przygotowane przez nauczyciela.

Nauczyciel	**Uczeń**
Czynności wstępne	
7. Sprawdzenie listy obecności. 8. Nauczyciel podaje temat lekcji.	7. Przygotowanie zeszytów i przyborów szkolnych. 8. Uczniowie zapisują temat lekcji w zeszytach.

Część Praktyczna	
Rozpoczynamy rozwiązywanie zadań. Nauczyciel wyznacza kolejne osoby rozwiązujące zadania na tablicy. **Zadanie 1** Składając do kasy oszczędności, w każdym miesiącu o 20zł więcej niż w poprzednim uzbieramy po n miesiącach 1845zł. Oblicz liczbę miesięcy n, jeżeli pierwszy wkład wynosił 125zł.	Uczniowie wyznaczeni przez nauczyciela rozwiązują zadania na tablicy, gdy reszta klasy zapisuje swoje rozwiązania w zeszytach. **Zadanie 1** Dane: a_1=125 (pierwsza wpłata); r=20 (zwiększanie wpłaty); S_n=1845 (suma oszczędności) Szukane: n- ilość miesięcy (miesięcy jest liczbę naturalną dodatnią) $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$ - wzór na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $\frac{2 \cdot 125 + (n-1) \cdot 20}{2} \cdot n = 1845$ $\frac{250 + 20n - 20}{2} \cdot n = 1845$ $230n + 20n^2 - 3690 = 0$ $2n^2 + 23n - 369 = 0$ $\Delta = 3481$ $\sqrt{\Delta} = 59$ $n_1 = -20{,}5 \notin N_+$ $n_2 = 9 \in N_+$ Odpowiedź: Ilość miesięcy n wynosi 9.
Zadanie 2 Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym x + y = 8. Oblicz x i y.	**Zadanie 2** $\frac{x+19}{2} = y$ $y = 8 - x$ $\frac{x+19}{2} = 8 - x$ $x + 19 = 16 - 2x$ $3x = -3$ $x = -1$ $19 = -1 + (3-1)r$ $20 = 2r$ $10 = r$

$y = 9$

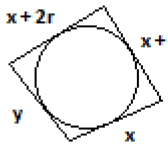
$$x = -1$$

Odpowiedź: Kolejne wyrazy ciągu to odpowiednio -1, 9, 19

Zadanie 3

Udowodnij, że jeżeli długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu tworzą ciąg arytmetyczny, to przynajmniej dwa boki tego czworokąta mają taką samą długość.

Zadanie 3



$$x + x + 2r = x + r + y$$
$$y = x + r$$

Czyli dwa boki są sobie równe

□

Zadanie 4

Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy zeru. Oblicz S_{11}.

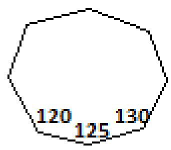
Zadanie 4

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11$$
$$a_6 = 0$$
$$\begin{cases} a_1 = 0 - 5r \\ a_{11} = 0 + 5r \end{cases}$$
$$a_1 + a_{11} = 0 - 5r + 0 + 5r$$
$$a_1 + a_{11} = 0$$
$$S_{11} = \frac{0}{2} \cdot 11 = 0$$

Zadanie 5

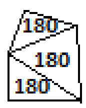
Miary kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica wynosi 5°. Najmniejszy kąt ma miarę 120 ° . Wyznacz liczbę boków wielokąta.

Zadanie 5



$$a_1 = 120$$
$$r = 5$$
$$a_n = 120 + (n-1)5 = 5n + 115$$

$$\frac{120 + 5n + 115}{2} \cdot n = (n-2) \cdot 180$$

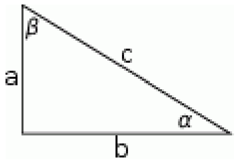


Sn –suma miar kątów wielokąta o n bokach

$$S_n = (n-2) \cdot 180$$

$$(5n + 235) \cdot n = (n-2) \cdot 360$$
$$5\mathrm{n}^2 + 235 = 360n - 720$$
$$\mathrm{n}^2 - 25n + 144 = 0$$
$$\Delta = 49$$
$$n_1 = \frac{25 - 7}{2} = 9$$

	$$n_2 = \frac{25+7}{2} = 16$$ $5n + 115 = 45 + 115 = 160$ $5n + 115 = 80 + 115 = 185$ Odpowiedź: Jest to dziesięciobok, bo dla 16 nie będzie wypukły.
Zadanie 6 W ciągu arytmetycznym o nieparzystej liczbie wyrazów suma wyrazów stojących na miejscach nieparzystych równa się 44, a suma pozostałych wynosi 33. Znajdź wyraz środkowy i liczbę wyrazów tego ciągu.	**Zadanie 6** Jeżeli oznaczymy wyrazy ciągu przez $a_1,\ldots,a_{2n+1}$, to środkowy wyraz to a_{n+1} (bo np. $(n + 1) - 1 = (2n + 1) - (n + 1)$). Wiemy, że: $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} = 44$ $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = 33$ Z definicji ciągu arytmetycznego mamy $a_{2n+1} = a_{2n} + r,$ $a_{2n-1} = a_{2n-1} + r\,,$ . . . $a_3 = a_2 + r\,.$ Zatem mamy $44 = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} = a_1 + a_2 +$ $+ r + \cdots + a_{2n} + r =$ $= a_1 + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) + nr =$ $= a_1 + 33 + nr$ $a_{n+1} = a_1 + nr = 44 - 33 = 11$ Zauważmy, że $a_1, a_3 = a_1 + 2r, \ldots, a_{2n+1} = a_1 + 2nr$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $2r$ i $n + 1$ wyrazach. Ze wzoru na sumę takiego ciągu mamy. $\frac{2a_1+2nr}{2} \cdot (n+1) = 44$ $a_{n+1} \cdot (n+1) = 44$ $11 \cdot (n+1) = 44$ $n = 3$ Zatem wszystkich wyrazów jest $2n + 1 = 7$

<table>
<tr>
<td>Zadanie 7
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.</td>
<td>Zadanie 7


Możemy tak oznaczyć boki trójkąta aby podany warunek był postaci $2b = a + c$.
Podnosząc równość $2b = a + c$ do kwadratu i stosując twierdzenie Pitagorasa mamy
$$4b^2 = a^2 + c^2 + 2ac$$
$$4c^2 - 4a^2 = a^2 + c^2 + 2ac$$
$$3c^2 - 5a^2 - 2ac = 0 \ /: a^2$$
$3\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 5 - 2\frac{c}{a} = 0$
Podstawiając
$t = \frac{c}{a} \in (0, 1)$
mamy równanie
$$3t^2 - 2t - 5 = 0$$
Liczymy, $\Delta = 4 + 60 = 64$.
Dodatni pierwiastek to . $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$
Stąd
$$sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$$
Zatem
$$sin\beta = \sqrt{1 - cos^2\beta} = \sqrt{1 - (\frac{a}{c})^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} =$$
$$= \frac{4}{5}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Podsumowanie:
Zadanie pracy domowej
Zadania nie zrealizowane w czasie zajęć.</td>
</tr>
</table>

Klasa 2

Temat: Ciąg geometryczny – powtórzenie wiadomości.

Cele:

- uczeń podaje definicję ciągu geometrycznego,
- uczeń podaje definicje monotoniczności ciągu geometrycznego,
- uczeń stosuje definicję ciągu geometrycznego w zadaniach,
- uczeń sprawdza czy ciąg jest geometryczny,
- uczeń znajduje pierwszy i kolejne wyrazy ciągów oraz iloraz ciągu,
- uczeń podaje wzór na sumę ciągu geometrycznego,
- uczeń wykorzystuje wzór na sumę ciągu geometrycznego w zadaniach,

Metoda:

- ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- „Matematyka 2 LO podręcznik” E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab
- „Matematyka. Klasa 2. Zbiór zadań - szkoła ponadgimnazjalna” E. Kurczab, M. Świda, M. Kurczab,

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Część wykładowa</td></tr>
<tr><td align="center">Czynności nauczyciela</td><td align="center">Czynności ucznia</td></tr>
<tr><td>1. Nauczyciel przygotowuję się do lekcji:
• sprawdza listę obecności,
• podaje temat uczniom,
• rozdaję zadania,

2. Nauczyciel określa czym klasa będzie zajmowała się na lekcji i zaczyna część powtórzeniową, w której zadaje pytania uczniom.
• Co to ciąg geometryczny?

• Jaki jest wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego?

• Jaki jest wzór na sumę ciągu geometrycznego?
• Jak obliczamy środkowy wyraz ciągu geometrycznego?</td><td>1. Uczniowie przygotowują się do lekcji:
• zajmują miejsca,
• przygotowują książki i przybory szkolne,

2. Uczniowie odpowiadają na pytania.

• Ciągiem geometrycznym nazwiemy ciąg, w którym każdy wyraz, oprócz wyrazu pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego i tej samej pewnej liczby q, którą nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.
• $a_n = a_1 * q^{n-1}, n \geq 2$
• $\begin{cases} S_n = a_1 * \frac{1-q^n}{1-q}\ ,\ q \neq 1 \\ S_n = n * a_1\ ,\ q = 1 \end{cases}$
• $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$

• Ciąg geometryczny jest rosnący gdy:</td></tr>
</table>

• Jak sprawdzamy monotoniczność ciągu geometrycznego?	$(q > 1 \wedge a_1 > 0) \vee (a_1 < 0 \wedge 0 < q < 1)$. Ciąg geometryczny jest malejący gdy: $(a_1 > 0 \wedge 0 < q < 1) \vee (a_1 < 0 \wedge q > 1)$. Ciąg geometryczny jest stały gdy: $a_1 = 0 \vee (a_1 \neq 0 \wedge q = 1)$
Część ćwiczeniowa	
Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
I. Nauczyciel wybiera osoby które rozwiązują zadania na tablicy. (Ilość wykonanych zadań zależy od tempa pracy uczniów) **Zadanie 1** Określ, czy podany ciąg, jest ciągiem geometrycznym: a) $-2, -4, -8, \ldots$ b) $1, 3, 6, 12, \ldots$	I. Wskazani uczniowie rozwiązują zadania na tablicy, a reszta klasy w zeszytach. **Zadanie 1** a) $-2, -4, -8, \ldots$ $-4 : (-2) = (-8) : (-4)$ $2 = 2$ Podany ciąg jest geometryczny. b) $1, 3, 6, 12, \ldots$ $3 : 1 = 6 : 3 = 12 : 6$ $3 \neq 2 = 2$ Podany ciąg nie jest geometryczny.
Zadanie 2 Dla jakiej wartości "x", podane wyrażenia stanowią kolejne wyrazy ciągu geometrycznego? $x, 6, 3x + 3$	**Zadanie 2** $x, 6, 3x + 3$ $36 = x(3x + 3)$ $3x^2 + 3x - 36 = 0$ $x^2 + x - 12 = 0$ $\Delta = 1 - 4 * 1 * (-12) = 1 + 48 = 49$ $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2} = \frac{-1-7}{2} = -4$ $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2a} = \frac{-1+7}{2} = 3$
Zadanie 3 Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego o ilorazie -3, jeżeli jego czwarty wyraz ma wartość 9. Oblicz wartość siódmego wyrazu ciągu.	**Zadanie 3** $a_4 = 9$ $q = -3$ $a_n = a_1 * q^{n-1}$

	$9 = a_1 * (-3)^{4-1}$ $9 = a_1 * (-3)^3$ $-27a_1 = 9$ $a_1 = -\frac{1}{3}$ $a_n = -\frac{1}{3} * (-3)^{n-1}$ $a_7 = -\frac{1}{3} * (-3)^{7-1} = -\frac{1}{3} * 729 = -243$
Zadanie 4 Podaj wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego, jeżeli jego trzeci wyraz ma wartość -8, a czwarty ma wartość -4.	**Zadanie 4** $a_3 = -8$ $a_4 = -4$ $q = -4 : (-8) = \frac{1}{2}$ $a_n = a_1 * q^{n-1}$ $-8 = a_1 * \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$ $-8 = a_1 * \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $-8 = \frac{1}{4}a_1$ $a_1 = -32$ $a_{n+1} = a_n * \frac{1}{2}$
Zadanie 5 Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego, jeżeli jego drugi wyraz ma wartość 6, a szósty ma wartość 96.	**Zadanie 5** $a_2 = 6$ $a_6 = 96$ $a_n = a_1 * q^{n-1}$ $6 = a_1 * q^{2-1} \rightarrow 6 = a_1 * q$ $96 = a_1 * q^{6-1} \rightarrow 96 = a_1 * q^5$ $\begin{cases} 96 = a_1 * q^5 \\ 6 = a_1 * q \end{cases}$ $\frac{96}{6} = \frac{a_1 * q^5}{a_1 * q}$ $q^4 = 16$ $q_1 = -2 \quad \cup \quad q_2 = 2$ $a_n = a_1 * q^{n-1}$ $\begin{cases} 6 = a_1 * (-2)^{2-1} \\ 6 = a_1 * 2^{2-1} \end{cases}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_1 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} a_n = -3 * (-2)^{n-1} \\ a_n = 3 * 2^{n-1} \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Zadanie 6
Oblicz wartość ósmego wyrazu ciągu geometrycznego, którego siódmy wyraz ma wartość 9, a dziewiąty ma wartość 1.</td>
<td>Zadanie 6
$a_7 = 9$
$a_9 = 1$

$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$

$|a_8| = \sqrt{a_7 * a_9}$
$|a_8| = \sqrt{9 * 1}$
$|a_8| = \sqrt{9}$
$|a_8| = 3$
$a_8 = -3 \quad \cup \quad a_8 = 3$</td>
</tr>
<tr>
<td>Zadanie 7
Oblicz sumę wyrazów ciągu geometrycznego:
$-1 + 2 - 4 + \cdots - 64$</td>
<td>Zadanie 7
$-1 + 2 - 4 + \cdots - 64$
$a_1 = -1$
$a_n = -64$

$q = 2 : (-1) = -2$

$-64 = -1 * (-2)^{n-1}$
$64 = (-2)^{n-1}$
$(-2)^6 = (-2)^{n-1}$
$6 = n - 1$
$n = 6 + 1$
$n = 7$

$S_n = a_1 * \frac{1-q^n}{1-q}$
$S_7 = -1 * \frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} = -1 * \frac{1-(-128)}{1+2} = -1 * \frac{129}{3} =$
$= -1 * 43 = -43$</td>
</tr>
<tr>
<td>II. Nauczyciel podaję pracę domową (zadania które nie zostały zrobione na zajęciach).</td>
<td>II. Uczniowie zapisują pracę domową.</td>
</tr>
</table>

Klasa 2

Temat: CIĄG GEOMETRYCZNY – POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI.

Typ lekcji: ćwiczeniowa;

Czas trwania zajęć: 45 minut

Cele:

OGÓLNE.

- obliczanie ilorazu, kolejnych wyrazów podanego ciągu geometrycznego;
- sprawdzanie, czy dana liczba jest wyrazem ciągu geometrycznego;
- obliczanie sumy wyrazów ciągu geometrycznego.

SZCZEGÓŁOWE. Uczeń:

- oblicza iloraz oraz kolejne wyrazy ciągu geometrycznego;
- zapisuje dowolne wyrazy ciągu geometrycznego, gdy dany jest iloraz i dowolny wyraz tego ciągu bądź tylko dwa dowolne wyrazy;
- sprawdza, czy dana liczba jest wyrazem ciągu geometrycznego;
- oblicza sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

WYCHOWAWCZE.

- rozwijanie umiejętności poprawnego formułowanie myśli.

Metody pracy:

- podająca;
- aktywizująca.

Formy pracy:

- praca z całą klasą
- indywidualna praca uczniów.

Środki dydaktyczne:

- Podręcznik do klasy II liceum: „Matematyka. Poznać, zrozumieć”, wyd. WSiP.
- Karta pracy, przygotowana przez prowadzącego lekcję.

Scenariusz lekcji

Czynności nauczyciela	Czynności ucznia
IV. Część wstępna 5. Przywitanie uczniów. Czynności organizacyjno-porządkowe. 6. Podanie celu dzisiejszej lekcji: – powtórzenie wiadomości dotyczących ciągu geometrycznego. Sformułowanie tematu lekcji: CIĄG GEOMETRYCZNY – POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI.	Przygotowanie się do zajęć.
V. Część właściwa Przypomnienie definicji ciągu geometrycznego oraz ilorazu ciągu. Zapisanie wzoru ogólnego: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ Znając pierwszy wyraz ciągu oraz jego iloraz można obliczyć dowolny wyraz, korzystając z powyższego wzoru. Wzór na *n - ty* wyraz ciągu będzie wykorzystywany w wielu zadaniach dotyczących ciągu geometrycznego. W sytuacji, gdy należy wyznaczyć *n –ty* wyraz ciągu, znany jest *k – ty* wyraz i iloraz *q* to można skorzystać ze wzoru: $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$ Przypomnienie wzoru na sumę *n*	Ciąg geometryczny – ciąg liczbowy, w którym dowolny wyraz, z wyjątkiem pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego i ustalonej liczby, zwanej ilorazem ciągu. W ciągu geometrycznym iloraz wyrazu następnego i poprzedniego jest stały i niezerowy. Uczniowie aktywnie uczestniczą w lekcji.

początkowych wyrazów ciągu geometrycznego: $$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$ Bardzo ważna własność ciągu geometrycznego: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ 2. Rozwiązywanie zadań powtórzeniowych z karty pracy. <u>Zadanie 1.</u> Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że: a) q = 5, a_7 = 125 b) q = $-\frac{2}{3}$, a_6 = $\frac{32}{27}$ c) q = 0,5, a_8 = 2	2. Uczniowie rozwiązują zadania na tablicy. <u>Zadanie 1.</u> $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$ a) q = 5, a_7 = 125 $a_7 = a_1 \cdot q^{7-1}$ $a_7 = a_1 \cdot q^6$

$$125 = a_1 \cdot 5^6$$

$$a_1 = \frac{125}{5^6} = \frac{5^3}{5^6}$$

$$a_1 = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

b) q = $-\frac{2}{3}$, a_6 = $\frac{32}{27}$

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$$

$$a_7 = a_1 \cdot q^5$$

$$\frac{32}{27} = a_1 \cdot (-\frac{2}{3})^5$$

$$a_1 = \frac{32}{27} \cdot (-\frac{3}{2})^5$$

$$a_1 = \frac{32}{27} \cdot (-\frac{3^2 \cdot 3^3}{32})$$

$$a_1 = -9$$

c) q = 0,5, a_8 = 2

$$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1}$$

$$a_8 = a_1 \cdot q^7$$

$$2 = a_1 \cdot (0{,}5)^7$$

$$a_1 = 2 \div \frac{1}{128}$$

$$a_1 = 256$$

<u>Zadanie 2.</u>

Wyznacz iloraz q ciągu geometrycznego, wiedząc, że:

a) a_1 = 6, a_5 = $\frac{2}{27}$
b) a_1 = -1, a_{10} = -512
c) a_1 = 100, a_5 = 65,61

<u>Zadanie 2.</u>

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a) a_1 = 6, a_5 = $\frac{2}{27}$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$\frac{2}{27} = 6 \cdot q^4$$

$$q^4 = \frac{1}{81}$$

$q = \frac{1}{3}$ lub $q = -\frac{1}{3}$

b) a_1 = -1, a_{10} = -512

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$$
$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$
$$-512 = (-1) \cdot q^9$$
$$q^9 = 512$$
$$q = 2$$

c) $a_1 = 100$, $a_5 = 65{,}61$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$65{,}61 = 100 \cdot q^4$$
$$q^4 = 0{,}6561 = \frac{6561}{1000}$$
$$q^4 = \frac{3^8}{10^4} = \frac{9^4}{10^4} = (\frac{9}{10})^4$$
$$q = \frac{9}{10} \quad \text{lub} \quad q = -\frac{9}{10}$$

Zadanie 3.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a) $a_1 = 9$, $q = 2$, $a_n = 1152$

$$1152 = 9 \cdot 2^{n-1}$$
$$128 = 2^{n-1}$$
$$2^7 = 2^{n-1}$$
$$7 = n-1$$
$$n = 8$$

b) $a_1 = -1$, $q = -\frac{2}{7}$, $a_n = \frac{8}{343}$

$$\frac{8}{343} = -1 \cdot (-\frac{2}{7})^{n-1}$$
$$-\frac{8}{343} = (-\frac{2}{7})^{n-1}$$
$$(-\frac{2}{7})^3 = (-\frac{2}{7})^{n-1}$$
$$3 = n-1$$
$$n = 4$$

c) $a_1 = -1{,}5$, $q = \frac{1}{3}$, $a_n = -\frac{1}{54}$

Zadanie 3. Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego, wiedząc, że: a) $a_1 = 9$, $q = 2$, $a_n = 1152$ b) $a_1 = -1$, $q = -\frac{2}{7}$, $a_n = \frac{8}{343}$ c) $a_1 = -1{,}5$, $q = \frac{1}{3}$, $a_n = -\frac{1}{54}$	$-\frac{1}{54} = -1{,}5 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}$ $-\frac{1}{54} \cdot (-\frac{2}{3}) = (\frac{1}{3})^{n-1}$ $\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^{n-1}$ $(\frac{1}{3})^4 = (\frac{1}{3})^{n-1}$ $4 = n-1$ $n = 5$ Zadanie 4 a) $6-2\sqrt{5}$, $16-8\sqrt{5}$, $56-24\sqrt{5}$ Można wykazać na dwa sposoby, że powyższe liczby w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. I) Iloraz wyrazu następnego i poprzedniego jest stały i różny od zera. $\frac{16-8\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} = \frac{56-24\sqrt{5}}{16-8\sqrt{5}}$ $(16-8\sqrt{5})(16-8\sqrt{5}) = (6-2\sqrt{5})(56-24\sqrt{5})$ $256-128\sqrt{5}-128\sqrt{5}+320 = 336-144\sqrt{5}-112\sqrt{5}+240$ $576-256\sqrt{5} = 576-256\sqrt{5}$ L=P II) Kwadrat środkowego wyrazu ciągu geometrycznego jest równy iloczynowi poprzedniego wyrazu i następnego. $(16-8\sqrt{5})^2 = (6-2\sqrt{5})(56-24\sqrt{5})$ $256-256\sqrt{5}+320 = 336-144\sqrt{5}-112\sqrt{5}+240$ $576-256\sqrt{5} = 576-256\sqrt{5}$ L=P b) $3+2\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$, 1 I) $\frac{-1-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{-1-\sqrt{2}}$ $(-1-\sqrt{2})(-1-\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$ L: $1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}$ P: $3+2\sqrt{2}$ L=P Zadanie 5

Zadanie 4. Wykaż, że trzy dane liczby w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny: a) $6-2\sqrt{5}$, $16-8\sqrt{5}$, $56-24\sqrt{5}$ b) $3+2\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$, 1	$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$ n = 11 a_1 = -1 q = 2 $S_{11}=\frac{a_1\left(1-q^{11}\right)}{1-q}$ $S_{11}=\frac{-1\cdot\left(1-2^{11}\right)}{1-2}=1-2^{11}=1-2048=-2047$ <u>Zadanie 6.</u> $$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$ a_1 = 4 $a_n=\frac{1}{512}$ $q=\frac{1}{2}$ Aby obliczyć sumę wyrazów podanego ciągu geometrycznego najpierw należy wyznaczyć ich liczbę n: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ $\frac{1}{512}=4\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$ $\frac{1}{2048}=(\frac{1}{2})^{n-1}$ $(\frac{1}{2})^{11}=(\frac{1}{2})^{n-1}$ $11=n-1$ $n=12$ Następnie można już obliczyć dwunastu wyrazów ciągu: $S_{12}=\frac{4\cdot(1-(\frac{1}{2})^{12})}{1-\frac{1}{2}}=7\frac{511}{512}$ <u>Zadanie 7.</u> q – iloraz ciągu $a_1 = 4$, $a_2 = 4q$, $a_3 = 4q^2$, $a_4 = 108$

Zadanie 5.

Oblicz sumę jedenastu pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz ma wartość -1, iloraz wynosi 2.

Zadanie 6.

Oblicz sumę wyrazów, wiedząc, że tworzą one następujący ciąg geometryczny:

$$4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{512}$$

$$q=\frac{108}{4q^2}$$

$$4q^3=108$$

$$q^3=27$$

$$q=3$$

Szukane wyrazy:

$$a_2=12$$

$$a_3=36$$

Zadanie 8.

Aby obliczyć iloraz ciągu o podanym wzorze, wystarczy obliczyć jego dwa początkowe wyrazy a następnie szukany iloraz.

$$a_1=7\cdot 3^{1+1}=7\cdot 3^2=7\cdot 9=63$$

$$a_2=7\cdot 3^{2+1}=7\cdot 3^3=7\cdot 27=189$$

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{189}{63}=3$$

Zadanie 9.

$$a_1=64,$$

$$a_2=x,$$

$$a_3=4$$

Korzystamy z własności ciągu geometrycznego aby obliczyć wyraz a_2

$$a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$$

$$a_2^2=a_1\cdot a_3$$

$$a_2^2=64\cdot 4$$

$$a_2^2=256$$

$$a_2=16$$

$$q=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$$

$$a_4=a_3\cdot q=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

$$a_5=a_4\cdot q=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$q=\frac{-16}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$a_4=a_3\cdot q=4\cdot(-\frac{1}{4})=-1$$

$$a_5=a_4\cdot q=-1\cdot(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$$

Zatem $a_5=\frac{1}{4}$.

Zadanie 7.

Pomiędzy liczby 4 i 108 wstaw dwie liczby tak, aby wszystkie cztery tworzyły ciąg geometryczny.

Zadanie 10.

Z definicji ciągu arytmetycznego mamy:

$$x-1=y-1-x$$

Zaś z definicji ciągu geometrycznego mamy:

$$\frac{y}{x}=\frac{12}{y}$$

Należy utworzyć układ równań a następnie wyznaczyć x i y.

$$\begin{cases} x-1=y-1-x \\ \frac{y}{x}=\frac{12}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=y \\ y^2=12x \end{cases}$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$$

Rozwiązaniem są liczby: x = 3 i y = 6. Otrzymane ciągi mają postać:
arytmetyczny: (1, 3, 5)
geometryczny: (3, 6, 12).

Zadanie 11

a_1 = x – liczba płyt stojących na dolnej półce
a_2 = 24 – liczba płyt stojących na środkowej półce
a_3 = $24\cdot\frac{24}{x}$ - liczba płyt stojących na górnej półce
76 – suma wszystkich płyt

$$x+24+24\cdot\frac{24}{x}=76$$

$$x^2+24x-76x+576=0$$

$$x^2-52x+576=0$$

$$\Delta=400$$

$$\sqrt{\Delta}=20$$

$$x_1=16$$

$$x_2=36$$

Możliwe jest tylko jedno rozwiązanie. Ponieważ wiemy, ze ciąg geometryczny jest rosnący, to na dolnej półce stoi 36 płyt a na górnej

Zadanie 8. Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem: $a_n = 7 \cdot 3^{n+1}$, dla $n \geq 1$. Oblicz iloraz q tego ciągu. Zadanie 9. Liczby 64, x, 4 są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.	16.

Zadanie 10.

Ciąg (1, x, y-1) jest arytmetyczny, natomiast ciąg (x, y, 12) jest geometryczny. Oblicz x oraz y i podaj ten ciąg.

Zadanie 11. Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz ile płyt stoi na półce dolnej.	
VI. Część końcowa 2. Podsumowanie tematu dzisiejszych zajęć. 3. Odpowiedzi na pytania uczniów..	

RODoN

RADOMSKI OŚRODEK DOSKONALENIA NAUCZYCIELI

26-600 Radom, ul. J. Słowackiego 17,

tel. (048) 3600005,   fax (048) 3600065,

e-mail: rodon@rodon.radom.pl

www.rodon.radom.pl